Transmisión Digital

Primera parte - 2015-2016

José Ignacio Ronda Prieto

Santiago Zazo Bello

SSR, ETSIT, Universidad Politécnica de Madrid

jir@gti.ssr.upm.es,santiago@gaps.ssr.upm.es

http://www.gti.ssr.upm.es/˜jir

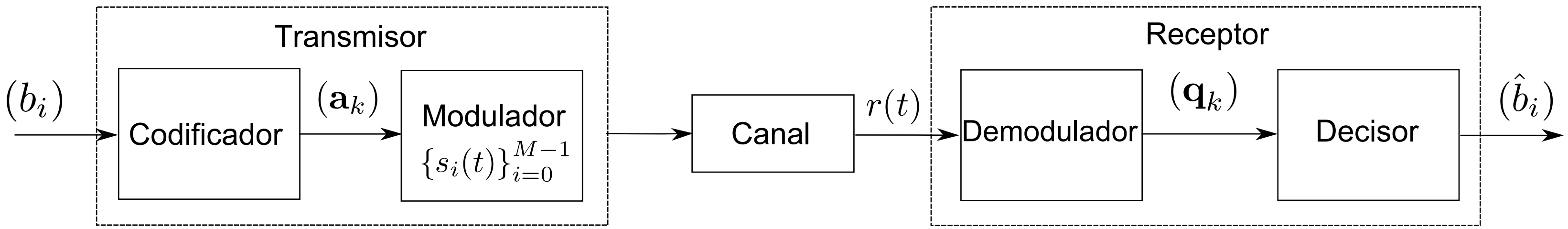
Preámbulo

Tema 1: Receptores óptimos

En este tema presentamos la teoría básica de las modulaciones digitales sin memoria.

1. Modelo de sistema de transmisión digital
2. Representación de señales deterministas
3. Modelado probabilístico del ruido
4. Receptores óptimos
5. Interferencia entre símbolos

Modelo de sistema de transmisión digital



Codificador: Conversión entre los símbolos de entrada, **ceros y unos,** y un conjunto de **vectores** reales o complejos. Conjunto de vectores: **constelación.**

Ejemplo: Vectores de salida unidimensionales

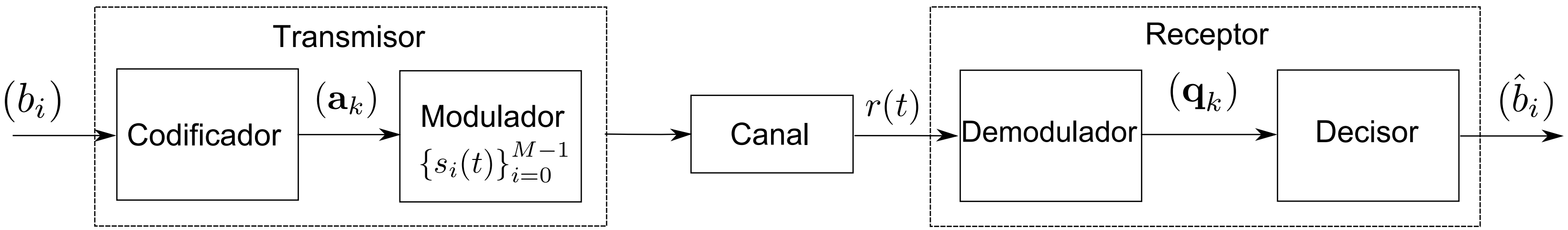
$\mathbf{a}_k = (a_{k0}),\, a_{k0} = -3, -1, +1, +3,$

mapeo

$$00 \mapsto -3,\ 01 \mapsto -1,\ 11 \mapsto +1,\ 11 \mapsto +3$$

Modulaciones avanzadas: el codificador se convertirá en un *sistema con memoria.*

Modelo de sistema de transmisión digital



Modulador: Conversión del **vector** $\mathbf{a}_k$ que recibe en una **señal física**, que es la que se transmite por el canal.
Caracterizado por una *base de señales* $\{\phi_i(t)\}_{i=0,\ldots,L-1}$.
Si recibe $\mathbf{a}_k = (a_{k0}, \ldots, a_{k,L-1})$, genera una señal

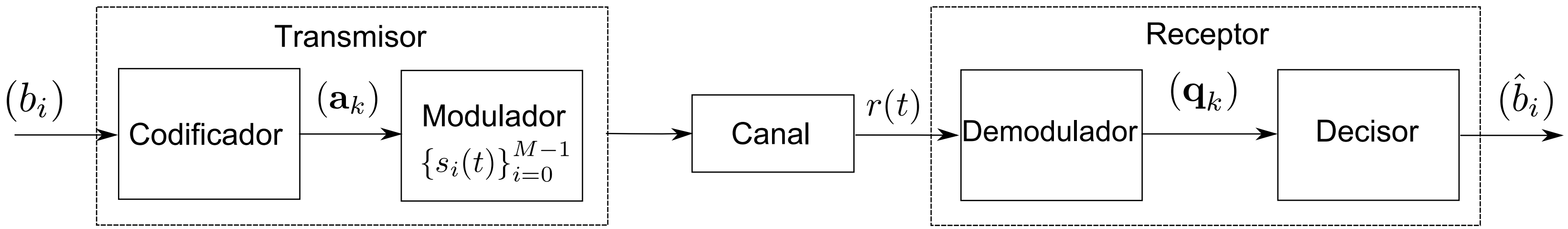
$$\sum_{i=0}^{L-1} a_{ki}\phi_i(t).$$

Conjunto de señales de esta forma: **alfabeto de señales** de la modulación.
Ejemplo: Las señales del alfabeto serían el conjunto

$$s_i(t) = a_i\phi_0(t),\ a_i = -3, -1, +1, +3$$

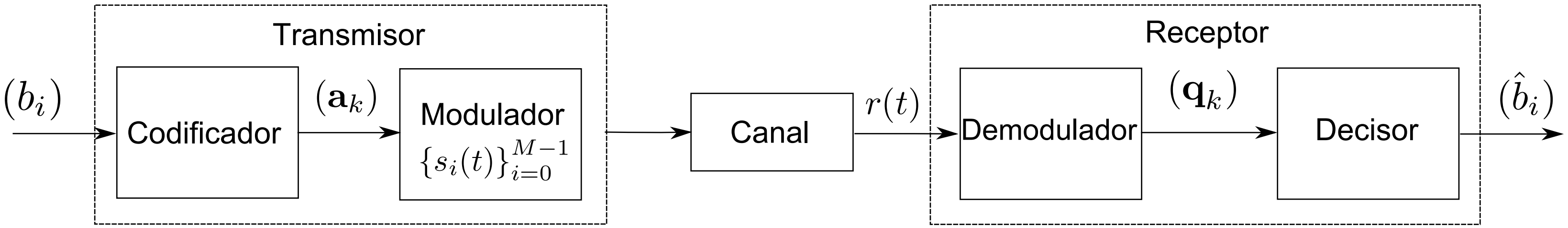
Mapeo que realiza el modulador: $a_i \mapsto a_i\phi_0(t)$

Modelo de sistema de transmisión digital



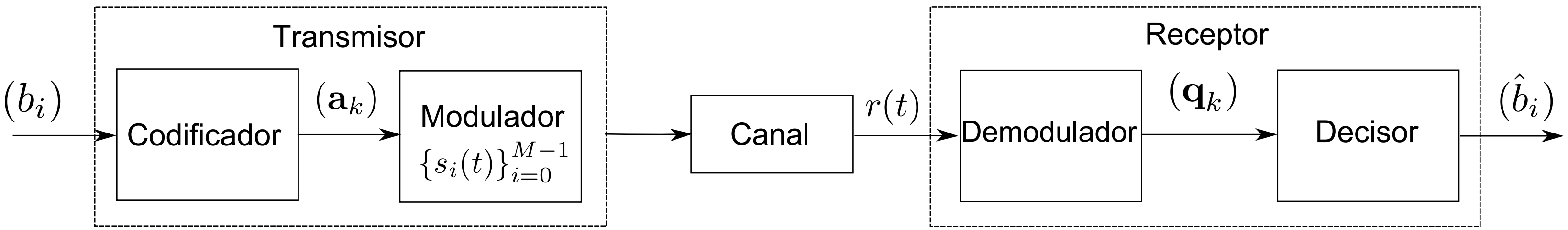
Canal: Lo modelaremos como un sistema lineal invariante más la adición de ruido.

Modelo de sistema de transmisión digital



Demodulador: Realiza el procesamiento de la señal recibida extrayendo la información necesaria para realizar la estimación de los símbolos transmitidos. Normalmente consiste en filtrado y muestreo y el resultado es la recuperación de los símbolos $(\mathbf{a}_k)$ con ruido.

Modelo de sistema de transmisión digital



Decisor: Lleva a cabo la estimación de los símbolos de entrada b_i a partir de la información proporcionada por el demodulador. Puede operar

- Independientemente para cada vector. Veremos que esto es óptimo en el caso que denominaremos *modulación sin memoria sin interferencia entre símbolos*.
- Teniendo en cuenta la secuencia de vectores recibidos.

El problema del receptor óptimo

Se transmite una de las señales

$$\{s_i(t)\}_{i=0}^{M-1},$$

todas con la misma probabilidad.
Se recibe

$$r(t) = s_i(t) + n(t)$$

$n(t)$ ruido blanco gaussiano.
Problema: Estimar $s_i(t)$ a partir de $r(t)$.

El problema del receptor óptimo

El problema sería mucho más sencillo si se tuviéramos vectores en lugar de señales:
Se transmite un vector $\mathbf{s}_i$ de un conjunto equiprobable

$$\{\mathbf{s}_i\}_{i=0}^{M-1}$$

Se recibe un vector

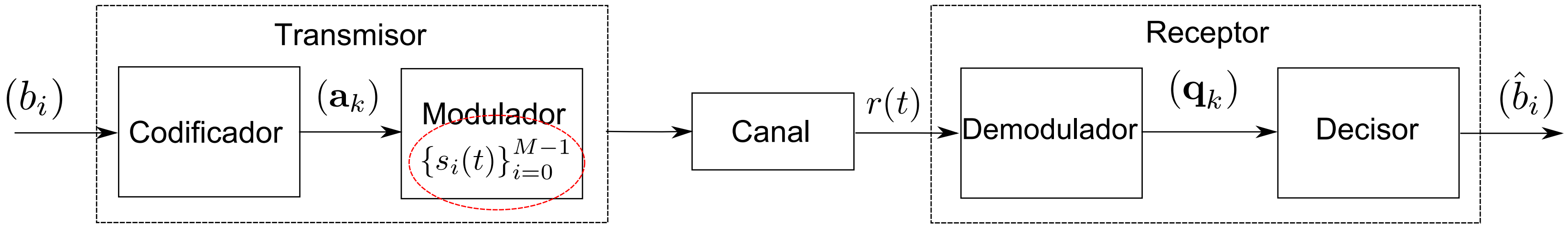
$$\mathbf{r} = \mathbf{s}_i + \mathbf{n}$$

donde $\mathbf{n}$ es un vector aleatorio.
Problema: Estimar $\mathbf{s}_i$ a partir de $\mathbf{r}$.

El problema del receptor óptimo

Para transformar las señales en vectores necesitamos la teoría del *espacio de señales de energía finita*.

Representación de señales deterministas



Espacio de señales de energía finita

Energía de una señal:

$$\mathcal{E}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt.$$

El *espacio de las señales de energía finita* es el conjunto de las señales $x(t)$ tales que $\mathcal{E}[x(t)] < \infty$.
Esta propiedad se preserva por suma y producto por escalar
$\Rightarrow$ Se trata de un espacio vectorial.

¿Son o no son de energía finita?

- $x(t) = w_{0,T}(t)$
- $x(t) = \cos \omega_0 t$
- $x(t) = \delta(t)$

Espacio de señales de energía finita

Energía de una señal:

$$\mathcal{E}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt.$$

El *espacio de las señales de energía finita* es el conjunto de las señales $x(t)$ tales que $\mathcal{E}[x(t)] < \infty$.
Esta propiedad se preserva por suma y producto por escalar
$\Rightarrow$ Se trata de un espacio vectorial.

¿Son o no son de energía finita?

- $x(t) = w_{0,T}(t)$
- $x(t) = \cos \omega_0 t$
- $x(t) = \delta(t)$

Espacio de señales de energía finita

Energía de una señal:

$$\mathcal{E}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt.$$

El *espacio de las señales de energía finita* es el conjunto de las señales $x(t)$ tales que $\mathcal{E}[x(t)] < \infty$.
Esta propiedad se preserva por suma y producto por escalar
$\Rightarrow$ Se trata de un espacio vectorial.

¿Son o no son de energía finita?

- $x(t) = w_{0,T}(t)$
- $x(t) = \cos \omega_0 t$
- $x(t) = \delta(t)$

Producto escalar

Las señales de energía finita forman un espacio vectorial en el que se define el *producto escalar*

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt.$$

Propiedades:

- $\langle x(t)+y(t), z(t)\rangle = \langle x(t), z(t)\rangle + \langle y(t), z(t)\rangle,$
  $\langle x(t), y(t)+z(t)\rangle = \langle x(t), y(t)\rangle + \langle x(t), z(t)\rangle$
- $\langle x(t), y(t)\rangle = \langle y(t), x(t)\rangle^*$
- $\langle \alpha x(t), y(t)\rangle = \alpha\langle x(t), y(t)\rangle,\ \ \langle x(t), \alpha y(t)\rangle = \alpha^*\langle x(t), y(t)\rangle$
- $\langle x(t), x(t)\rangle = 0 \Leftrightarrow x(t) = 0$

Producto escalar

Las señales de energía finita forman un espacio vectorial en el que se define el *producto escalar*

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt.$$

Propiedades:

- $\langle x(t)+y(t), z(t)\rangle = \langle x(t), z(t)\rangle + \langle y(t), z(t)\rangle$,
  $\langle x(t), y(t)+z(t)\rangle = \langle x(t), y(t)\rangle + \langle x(t), z(t)\rangle$
- $\langle x(t), y(t)\rangle = \langle y(t), x(t)\rangle^*$
- $\langle \alpha x(t), y(t)\rangle = \alpha \langle x(t), y(t)\rangle$, $\langle x(t), \alpha y(t)\rangle = \alpha^* \langle x(t), y(t)\rangle$
- $\langle x(t), x(t)\rangle = 0 \Leftrightarrow x(t) = 0$

Producto escalar

Las señales de energía finita forman un espacio vectorial en el que se define el *producto escalar*

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt.$$

Propiedades:

- $\langle x(t)+y(t), z(t)\rangle = \langle x(t), z(t)\rangle + \langle y(t), z(t)\rangle,$
  $\langle x(t), y(t)+z(t)\rangle = \langle x(t), y(t)\rangle + \langle x(t), z(t)\rangle$
- $\langle x(t), y(t)\rangle = \langle y(t), x(t)\rangle^*$
- $\langle \alpha x(t), y(t)\rangle = \alpha \langle x(t), y(t)\rangle, \quad \langle x(t), \alpha y(t)\rangle = \alpha^* \langle x(t), y(t)\rangle$
- $\langle x(t), x(t)\rangle = 0 \Leftrightarrow x(t) = 0$

Producto escalar

Las señales de energía finita forman un espacio vectorial en el que se define el *producto escalar*

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt.$$

Propiedades:

- $\langle x(t) + y(t), z(t) \rangle = \langle x(t), z(t) \rangle + \langle y(t), z(t) \rangle,$
  $\langle x(t), y(t) + z(t) \rangle = \langle x(t), y(t) \rangle + \langle x(t), z(t) \rangle$
- $\langle x(t), y(t) \rangle = \langle y(t), x(t) \rangle^*$
- $\langle \alpha x(t), y(t) \rangle = \alpha \langle x(t), y(t) \rangle, \quad \langle x(t), \alpha y(t) \rangle = \alpha^* \langle x(t), y(t) \rangle$
- $\langle x(t), x(t) \rangle = 0 \Leftrightarrow x(t) = 0$

Definiciones relacionadas

- *Energía:* $\mathcal{E}[x(t)] = \langle x(t), x(t)\rangle$
- *Norma:* $\|x(t)\| = \sqrt{\mathcal{E}[x(t)]}$
- *Distancia* entre dos señales $x(t)$ e $y(t)$ como $d(x(t), y(t)) = \|x(t) - y(t)\|$.
- $x(t)$ e $y(t)$ son *ortogonales* ($x(t) \perp y(t)$) si $\langle x(t), y(t)\rangle = 0$.
- *Subespacio ortogonal* a un conjunto C de señales: Subespacio $C^{\perp}$ de las señales que son ortogonales a todas las de C.

Definiciones relacionadas

- *Energía:* $\mathcal{E}[x(t)] = \langle x(t), x(t) \rangle$
- *Norma:* $\|x(t)\| = \sqrt{\mathcal{E}[x(t)]}$
- *Distancia* entre dos señales $x(t)$ e $y(t)$ como $d(x(t), y(t)) = \|x(t) - y(t)\|$.
- $x(t)$ e $y(t)$ son *ortogonales* ($x(t) \perp y(t)$) si $\langle x(t), y(t) \rangle = 0$.
- *Subespacio ortogonal* a un conjunto C de señales: Subespacio $C^{\perp}$ de las señales que son ortogonales a todas las de C.

Definiciones relacionadas

- *Energía:* $\mathcal{E}[x(t)] = \langle x(t), x(t)\rangle$
- *Norma:* $\|x(t)\| = \sqrt{\mathcal{E}[x(t)]}$
- *Distancia* entre dos señales $x(t)$ e $y(t)$ como $d(x(t), y(t)) = \|x(t) - y(t)\|$.
- $x(t)$ e $y(t)$ son *ortogonales* ($x(t) \perp y(t)$) si $\langle x(t), y(t)\rangle = 0$.
- *Subespacio ortogonal* a un conjunto C de señales: Subespacio $C^\perp$ de las señales que son ortogonales a todas las de C.

Definiciones relacionadas

- *Energía:* $\mathcal{E}[x(t)] = \langle x(t), x(t) \rangle$
- *Norma:* $\|x(t)\| = \sqrt{\mathcal{E}[x(t)]}$
- *Distancia* entre dos señales $x(t)$ e $y(t)$ como $d(x(t), y(t)) = \|x(t) - y(t)\|$.
- $x(t)$ e $y(t)$ son *ortogonales* ($x(t) \perp y(t)$) si $\langle x(t), y(t) \rangle = 0$.
- *Subespacio ortogonal* a un conjunto C de señales: Subespacio $C^{\perp}$ de las señales que son ortogonales a todas las de C.

Definiciones relacionadas

- *Energía:* $\mathcal{E}[x(t)] = \langle x(t), x(t) \rangle$
- *Norma:* $\|x(t)\| = \sqrt{\mathcal{E}[x(t)]}$
- *Distancia* entre dos señales $x(t)$ e $y(t)$ como $d(x(t), y(t)) = \|x(t) - y(t)\|$.
- $x(t)$ e $y(t)$ son *ortogonales* ($x(t) \perp y(t)$) si $\langle x(t), y(t) \rangle = 0$.
- *Subespacio ortogonal* a un conjunto C de señales: Subespacio $C^{\perp}$ de las señales que son ortogonales a todas las de C.

Sistemas ortonormales

- Un *sistema ortonormal* es un conjunto de señales $\{\phi_i(t)\}_{i=0,\ldots,L-1}$ unitarias y ortogonales entre sí, es decir, tales que $\langle \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle = \delta_{ij}$.
- Una señal $x(t)$ del subespacio generado por el sistema ortonormal $\{\phi_i(t)\}_{i=0,\ldots,L-1}$ se puede escribir como

$$x(t) = \sum_{k=0}^{L-1} x_k \phi_k(t), \;\; x_k = \langle x(t), \phi_k(t) \rangle .$$

- Si

$$x(t) = x_0\phi_0(t) + \ldots + x_{L-1}\phi_{L-1}(t),$$
$$y(t) = y_0\phi_0(t) + \ldots + y_{L-1}\phi_{L-1}(t),$$

podemos calcular el producto escalar utilizando los coeficientes:

$$\langle x(t), y(t) \rangle = x_0 y_0^* + \cdots + x_{L-1} y_{L-1}^* .$$

Sistemas ortonormales

- Un *sistema ortonormal* es un conjunto de señales $\{\phi_i(t)\}_{i=0,\ldots,L-1}$ unitarias y ortogonales entre sí, es decir, tales que $\langle \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle = \delta_{ij}$.
- Una señal $x(t)$ del subespacio generado por el sistema ortonormal $\{\phi_i(t)\}_{i=0,\ldots,L-1}$ se puede escribir como

$$x(t) = \sum_{k=0}^{L-1} x_k \phi_k(t), \; x_k = \langle x(t), \phi_k(t) \rangle \, .$$

- Si

$$x(t) = x_0\phi_0(t) + \ldots + x_{L-1}\phi_{L-1}(t),$$
$$y(t) = y_0\phi_0(t) + \ldots + y_{L-1}\phi_{L-1}(t),$$

podemos calcular el producto escalar utilizando los coeficientes:

$$\langle x(t), y(t) \rangle = x_0 y_0^* + \cdots + x_{L-1} y_{L-1}^* .$$

Sistemas ortonormales

- Un *sistema ortonormal* es un conjunto de señales $\{\phi_i(t)\}_{i=0,\ldots,L-1}$ unitarias y ortogonales entre sí, es decir, tales que $\langle \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle = \delta_{ij}$.
- Una señal $x(t)$ del subespacio generado por el sistema ortonormal $\{\phi_i(t)\}_{i=0,\ldots,L-1}$ se puede escribir como

$$x(t) = \sum_{k=0}^{L-1} x_k \phi_k(t), \;\; x_k = \langle x(t), \phi_k(t) \rangle \,.$$

- Si

$$x(t) = x_0\phi_0(t) + \ldots + x_{L-1}\phi_{L-1}(t),$$
$$y(t) = y_0\phi_0(t) + \ldots + y_{L-1}\phi_{L-1}(t),$$

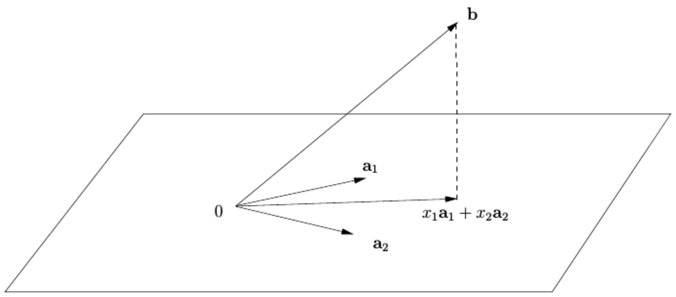
podemos calcular el producto escalar utilizando los coeficientes:

$$\langle x(t), y(t) \rangle = x_0 y_0^* + \cdots + x_{L-1} y_{L-1}^* \,.$$

Proyección ortogonal

La *proyecciòn ortogonal* de la señal $x(t)$ sobre el subespacio S generado por las $\{\phi_i(t)\}_{i=0,\ldots,L-1}$ es la señal $P_S x(t)$ de S definida por cualquiera de las siguientes propiedades equivalentes:

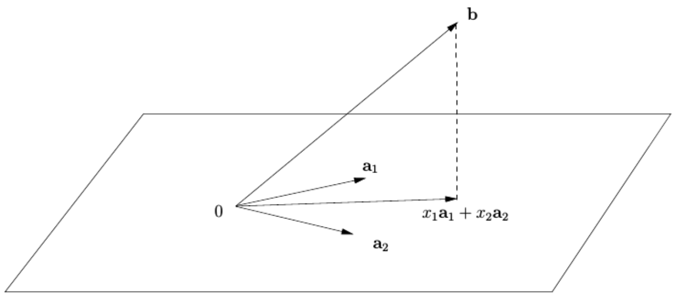
- El *error de proyección* $x(t) - P_S x(t)$ es ortogonal a todo S.
- $P_S x(t)$ es la señal $y(t)$ de S que minimiza $\|x(t) - y(t)\|$.
- $P_S x(t) = \sum_{i=0}^{L-1} \langle x(t), \phi_i(t) \rangle \phi_i(t)$



Proyección ortogonal

La *proyeccìón ortogonal* de la señal $x(t)$ sobre el subespacio S generado por las $\{\phi_i(t)\}_{i=0,\ldots,L-1}$ es la señal $P_S x(t)$ de S definida por cualquiera de las siguientes propiedades equivalentes:

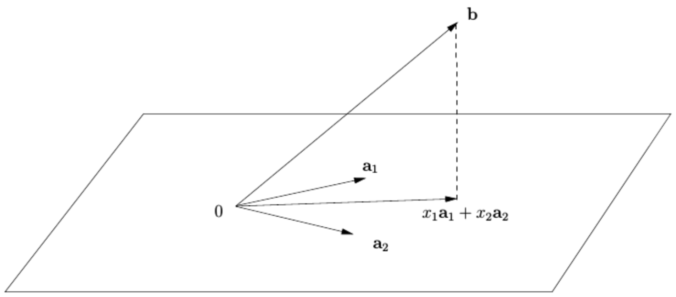
- El *error de proyección* $x(t) - P_S x(t)$ es ortogonal a todo S.
- $P_S x(t)$ es la señal $y(t)$ de S que minimiza $\|x(t) - y(t)\|$.
- $P_S x(t) = \sum_{i=0}^{L-1} \langle x(t), \phi_i(t) \rangle \, \phi_i(t)$



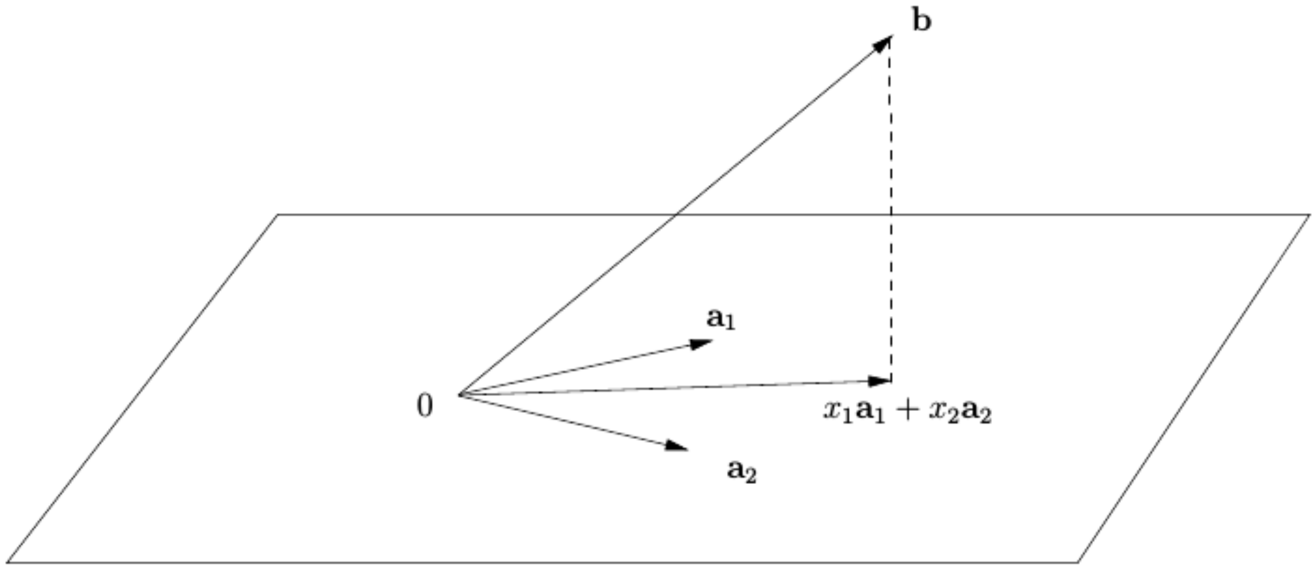
Proyección ortogonal

La *proyeccìón ortogonal* de la señal $x(t)$ sobre el subespacio S generado por las $\{\phi_i(t)\}_{i=0,\ldots,L-1}$ es la señal $P_S x(t)$ de S definida por cualquiera de las siguientes propiedades equivalentes:

- El *error de proyección* $x(t) - P_S x(t)$ es ortogonal a todo S.
- $P_S x(t)$ es la señal $y(t)$ de S que minimiza $\|x(t) - y(t)\|$.
- $P_S x(t) = \sum_{i=0}^{L-1} \langle x(t), \phi_i(t) \rangle \phi_i(t)$



Proyección ortogonal



Ortogonalización de Gram-Schmidt

Este algoritmo proporciona, dado un conjunto finito de señales

$$\{s_i(t)\}_{i=0,\ldots,M-1},$$

una base ortonormal

$$\{\phi_k(t)\}_{k=0,\ldots,L-1}$$

del subespacio que generan.

Ejemplo de proyección ortogonal

Queremos calcular la proyección ortogonal de la señal

$$s(t) = t\, w_{0,1}(t)$$

sobre el subespacio S con base ortonormal

$$\phi_0(t) = \sqrt{2} w_{0,1/2}(t)$$

$$\phi_1(t) = \sqrt{2} w_{1/2,1}(t)$$

Ejemplo de proyección ortogonal

Calculamos la proyección ortogonal utilizando la fórmula:

$$
\begin{aligned}
P_S s(t) &= \langle s(t), \phi_0(t)\rangle\, \phi_0(t) + \langle s(t), \phi_1(t)\rangle\, \phi_1(t) \\
&= \left[\sqrt{2}\int_0^{1/2} t\,dt\right]\phi_0(t) + \left[\sqrt{2}\int_{1/2}^{1} t\,dt\right]\phi_1(t) \\
&= \sqrt{2}\frac{1}{8}\phi_0(t) + \sqrt{2}\frac{3}{8}\phi_1(t) \\
&= \frac{1}{4}w_{0,1/2}(t) + \frac{3}{4}w_{1/2,1}(t)
\end{aligned}
$$

Ejemplo de proyección ortogonal

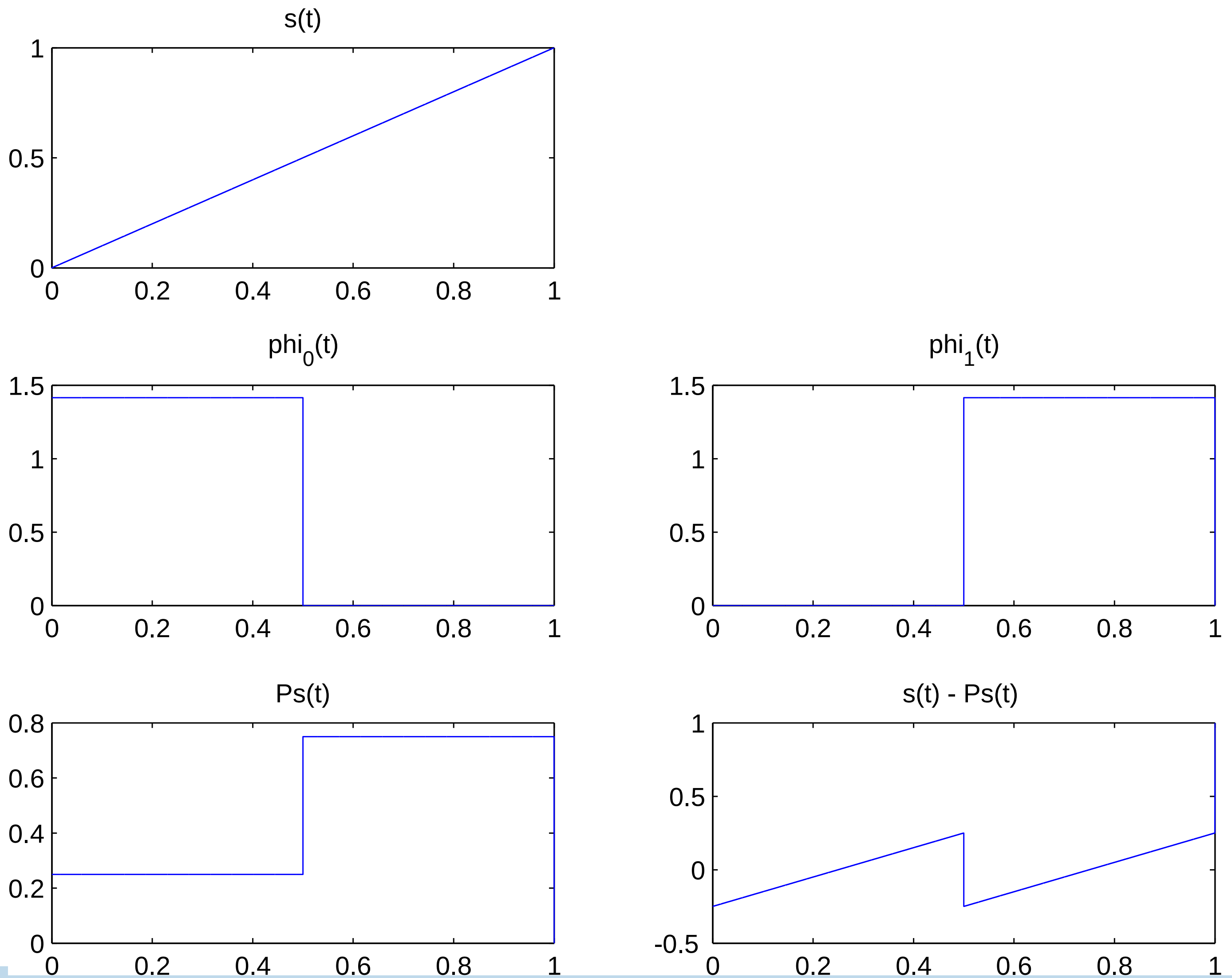
Comprobamos si el error de proyección es ortogonal a todas las señales de una base del subespacio:

$$e(t) = s(t) - P_S s(t) = \left(t - \frac{1}{4}\right) w_{0,1/2}(t) + \left(t - \frac{3}{4}\right) w_{1/2,1}(t)$$

$$\langle e(t), \phi_0(t) \rangle = \sqrt{2} \int_0^{1/2} e(t) dt = 0,$$

$$\langle e(t), \phi_1(t) \rangle = \sqrt{2} \int_{1/2}^{1} e(t) dt = 0.$$

Ejemplo de proyección ortogonal



Transformada de Fourier

Definimos la *transformada de Fourier* de una señal $x(t)$ como

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt.$$

La señal inicial se puede recuperar mediante

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df.$$

Transformada de Fourier

Propiedades que utilizaremos:

- Desplazamiento: $\mathcal{F}[x(t-t_0)] = e^{-j2\pi f t_0} X(f)$
- Modulación: $\mathcal{F}[x(t)e^{j2\pi f_0 t}] = X(f-f_0)$
- Simetría: si $x(t)$ es real y par, $X(f)$ es también real y par y $x(f) = \mathcal{F}[X(t)]$.
- Transformada de la parte real:

$$\mathcal{F}[\,\text{Re}\, x(t)] = \frac{1}{2}\left[X(f) + X^*(-f)\right]$$

- Convolución: $\mathcal{F}[x(t) * y(t)] = X(f)Y(f)$
- Producto: $\mathcal{F}[x(t)y(t)] = X(f) * Y(f)$
- Conjugación: $\mathcal{F}[x^*(-t)] = X^*(f)$

Producto escalar y TF

La TF preserva el producto escalar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)df.$$

Producto escalar y TF

La TF preserva el producto escalar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)df.$$

Por ello:

- Dos señales que no se solapan en frecuencia son ortogonales.
- La energía de una señal $x(t)$ es

$$\mathcal{E}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df.$$

Por eso $S_x(f) = |X(f)|^2$ se denomina *densidad espectral de energía* de $x(t)$.

Sistemas ortonormales

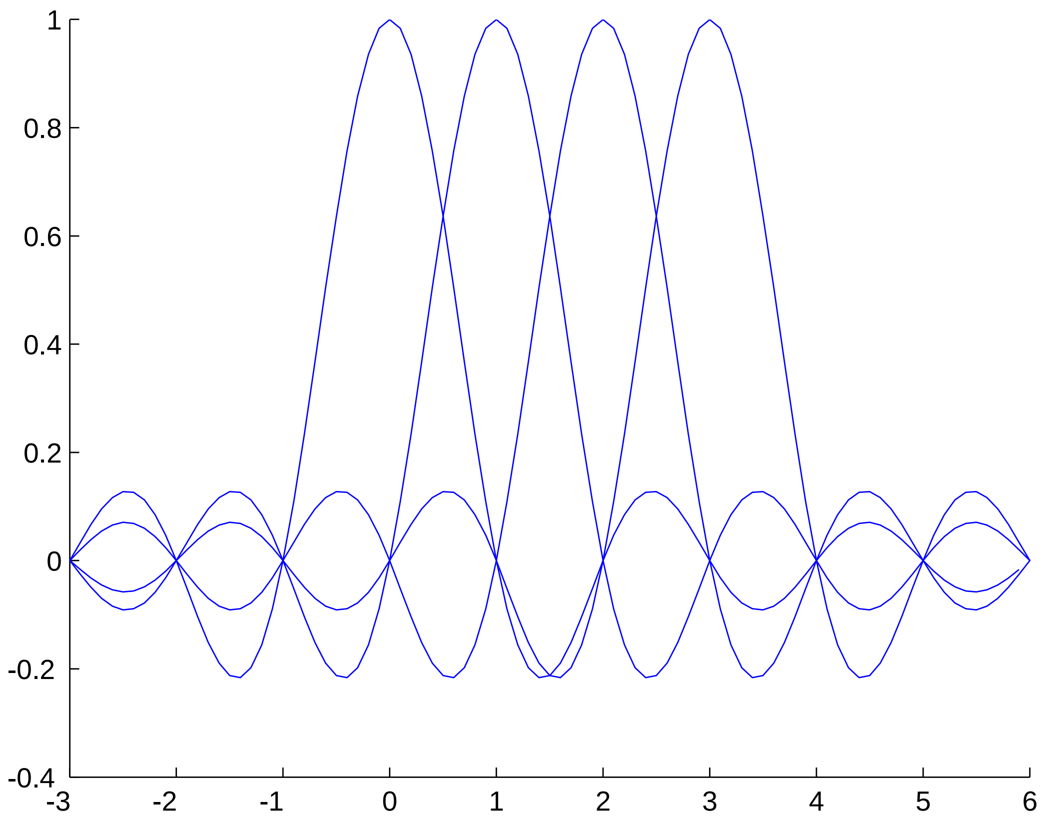
Dos ejemplos importantes de sistemas ortonormales:

- $\Phi_k(f) = w_{-1/(2T),1/(2T)}(f) e^{-jk2\pi fT}$, $k \in \mathbf{Z}$
- $\phi_k(t) = \dfrac{1}{\sqrt{T}} \operatorname{sinc}\left(\dfrac{t-kT}{T}\right)$

Las $\Phi_k(f)$ son las TF de las $\phi_k(t)$.

Sistemas ortonormales

Señales $\phi_k(t)$ para $T = 1$

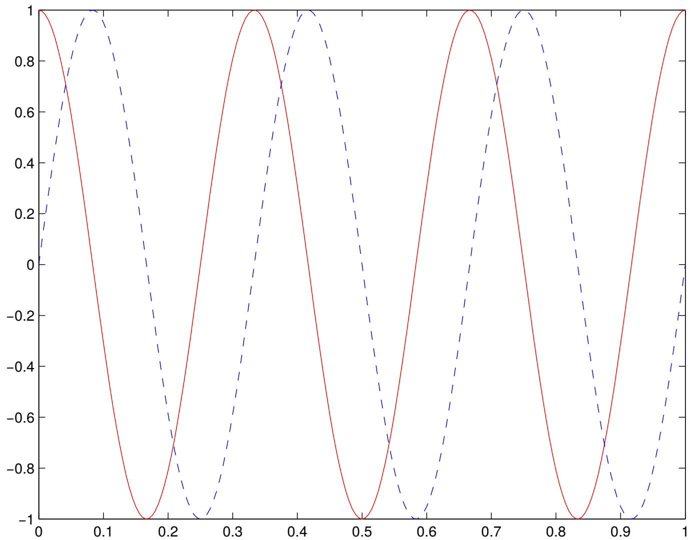


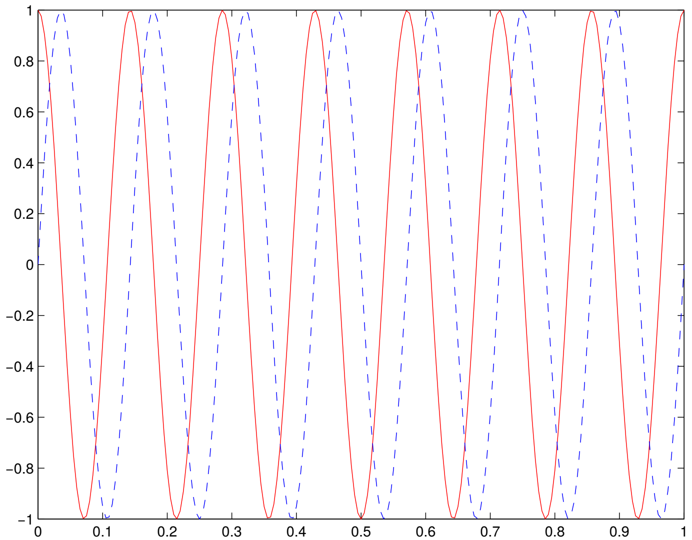
Sistemas ortonormales

A partir de las $\Phi_k(f)$ obtenemos el sistema ortonormal

$$\psi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T_0}} w_{0,T_0}(t) e^{-jk2\pi t/T_0}$$

que son (casi) las funciones base de la modulación OFDM.





Autocorrelación

La *autocorrelación* de una señal $h(t)$ se define como

$$r_h(\tau) = \langle h(t+\tau), h(t) \rangle$$

Autocorrelación

La *autocorrelación* de una señal $h(t)$ se define como

$$r_h(\tau) = \langle h(t+\tau), h(t) \rangle$$

o, equivalentemente,

$$r_h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau+t)h^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau-t)h^*(-t)dt = h(\tau)*h^*(-\tau).$$

Autocorrelación

La *autocorrelación* de una señal $h(t)$ se define como

$$r_h(\tau) = \langle h(t+\tau), h(t) \rangle$$

o, equivalentemente,

$$r_h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau+t)h^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau-t)h^*(-t)dt = h(\tau)*h^*(-\tau).$$

Propiedades:

$$\mathcal{F}[r_h(\tau)] = |H(f)|^2$$

$$\tilde{h}(t) = h(t-t_0) \Rightarrow r_{\tilde{h}}(\tau) = r_h(\tau)$$

$$r_h(0) = \|h(t)\|^2$$

$$r_h(0) \geq |r_h(\tau)|$$

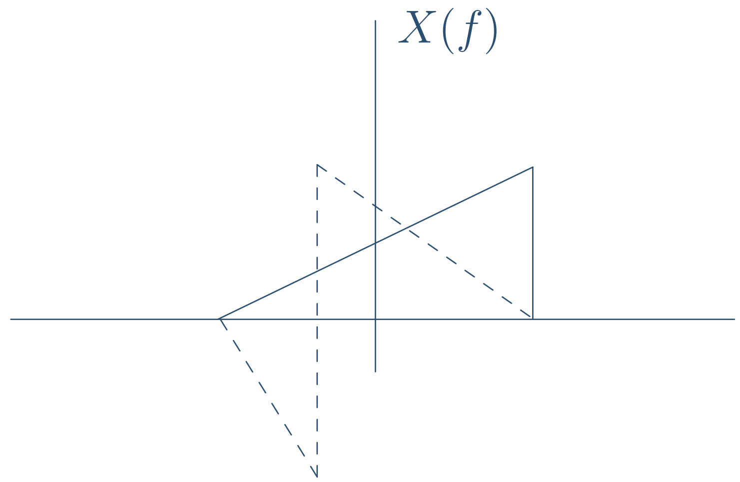
La primera propiedad indica que la transformada de Fourier de la autocorrelación es la densidad espectral de energía de la señal.

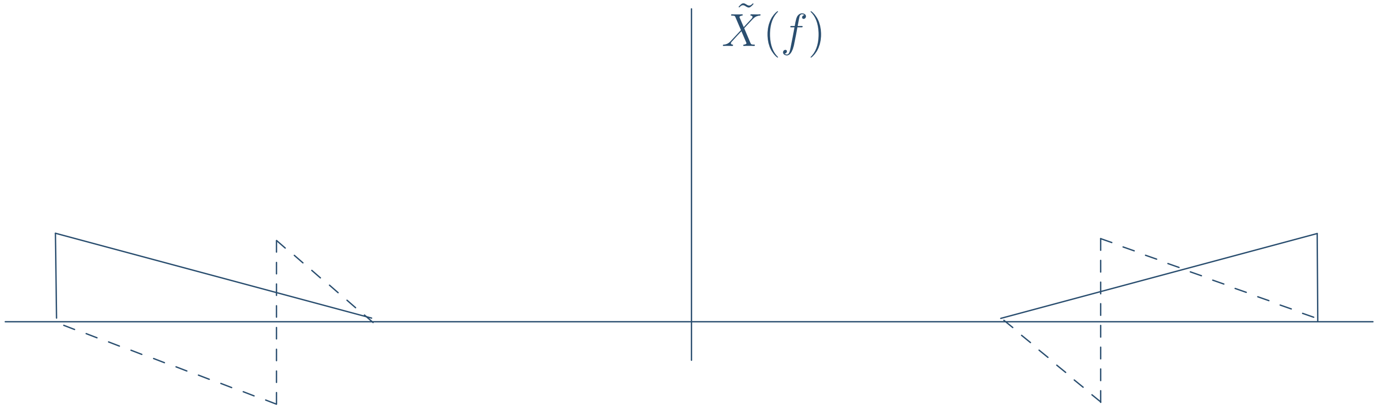
Ejercicio: Demostrar que $\mathcal{F}[h^*(-t)] = H^*(f)$

Modelo de sistema paso banda

- Las señales paso banda se procesan más fácilmente en su versión paso bajo.
- La versión paso bajo (*señal paso bajo equivalente* o *envolvente compleja*) de una señal paso banda es una señal compleja.

Modelo de sistema paso banda





De la señal paso bajo a la señal paso banda:
Modulación en doble banda lateral en cuadratura (DBLC):

$$\tilde{x}(t) = \Re[x(t)e^{j2\pi f_c t}] = \Re x(t)\cos(2\pi f_c t) - \Im x(t)\sin(2\pi f_c t)$$

En el dominio de la frecuencia:

$$x(t) \quad \rightarrow x(t)e^{j2\pi f_c t} \quad \rightarrow \tilde{x}(t) = \Re[x(t)e^{j2\pi f_c t}]$$

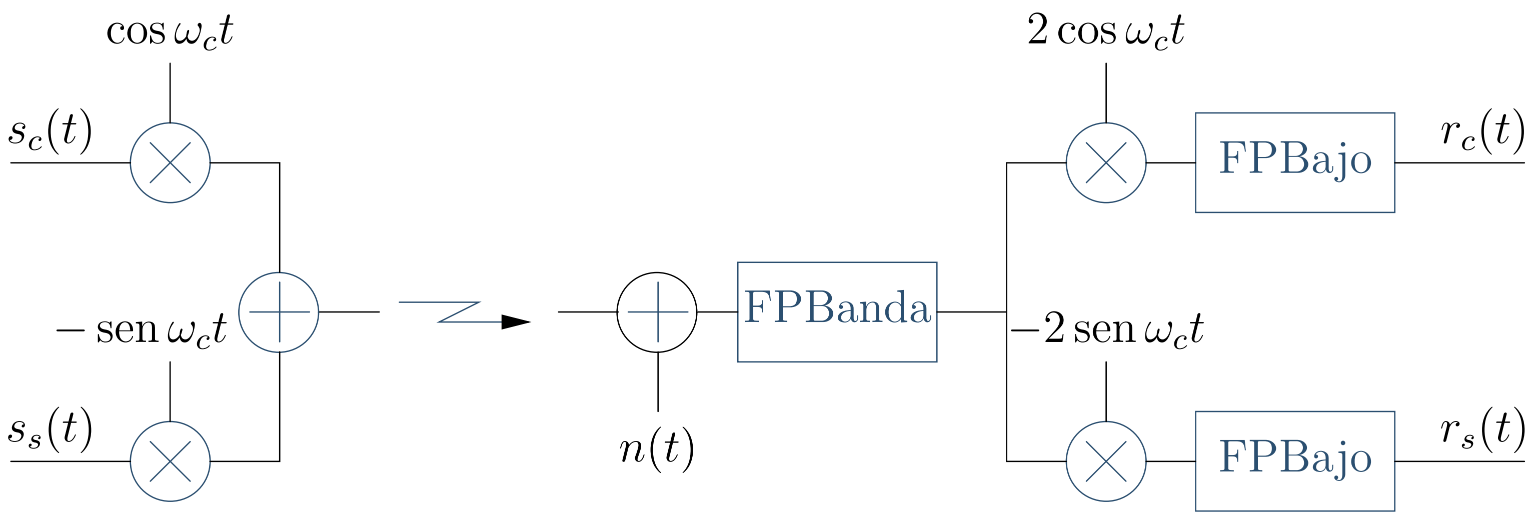
$$X(f) \quad \rightarrow X(f - j2\pi f_c) \quad \rightarrow \tilde{X}(f) = \frac{1}{2}[X(f-f_c) + \underbrace{X^*(-f-f_c)}_{X^*(-(f+f_c))}]$$

Obsérvese que

$$\mathcal{E}[\tilde{x}(t)] = \frac{1}{4}\left[\mathcal{E}[X(f-f_c)] + \mathcal{E}[X(f+f_c)]\right] = \frac{1}{2}\mathcal{E}[x(t)]$$

Modelo de sistema paso banda

Modulador y demodulador DBLC



Modelo de sistema paso banda

De la señal paso banda a la señal paso bajo:

$$X(f) = 2\tilde{X}(f+f_c)u(f+f_c)$$

Modelo de sistema paso banda

Si la señal modulada pasa por un canal $H(f)$, se recibe

$$\tilde{Y}(f) = \tilde{X}(f)H(f)$$

Al demodular obtenemos

$$\begin{aligned} Y(f) &= 2\tilde{Y}(f+f_c)u(f+f_c) \\ &= \underbrace{2\tilde{X}(f+f_c)u(f+f_c)}_{X(f)}\,\underbrace{H(f+f_c)}_{H_e(f)}. \end{aligned}$$

$H_e(f)$ es el *canal paso bajo equivalente*.

Modelo de sistema paso banda

Ejemplo: Canal con multitrayecto:

$$h(t) = \alpha\delta(t) + \beta\delta(t - t_0)$$

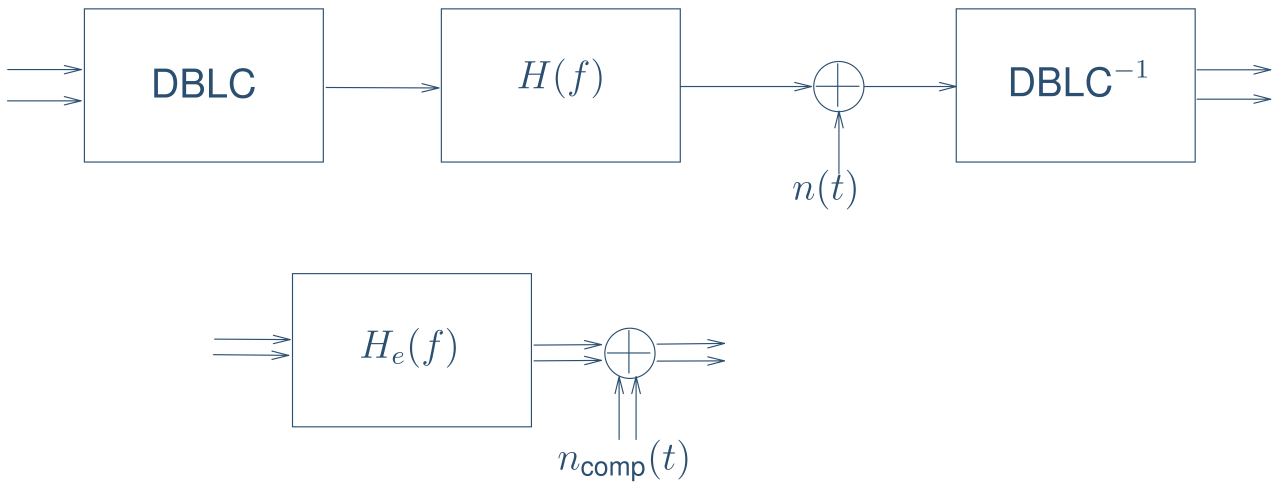
$$H(f) = \alpha + \beta e^{-j2\pi f t_0}$$

$$H_e(f) = \alpha + \beta e^{-j2\pi(f+f_c)t_0}$$

$$h_e(t) = \alpha\delta(t) + \beta e^{-j2\pi f_c}\delta(t - t_0)$$

Modelo de sistema paso banda

Sistema con modulación DBLC y sistema equivalente



(Las flechas dobles indican señales complejas)

Cuestiones de autoevaluación

1. Indicar cuáles de las siguientes relaciones son ciertas para señales complejas:

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \langle y(t), x(t)\rangle$$
$$\langle x(t)+y(t), z(t)\rangle = \langle x(t), z(t)\rangle + \langle y(t), z(t)\rangle$$
$$\langle \alpha x(t), y(t)\rangle = \alpha \langle x(t), y(t)\rangle$$
$$\langle x(t), \beta y(t)\rangle = \beta \langle x(t), y(t)\rangle$$

2. ¿Son ortogonales $\cos\omega_0 t$ y $\sin\omega_0 t$?
3. Indicar una sistema ortonormal $\{\phi_0(t), \phi_1(t)\}$ que sea base del subespacio generado por las señales $s_0(t) = w_{0,1}(t)$ y $s_1(t) = w_{0,1/2}(t)$.
4. ¿Cuánto vale la autocorrelación de $x(t-t_0)$ en función de la de $x(t)$?
5. Calcular la autocorrelación de $x(t) = w_{0,1}(t)$.

Complementos formativos

Visualización de espectros y constatación de que se satisface el T. de Plancherel.

```
% Fijamos el periodo de muestreo.
delta_t = 0.01;
% Generamos la señal x(t) = sen(2*pi*f*t), f=1,
% enventanada entre 0 y 1.
x = signal_box('sin',struct('t0',0,'t1',1,'f',1),delta_t);
% Visualizamos la señal.
figure; signal_plot(x);
% Generamos la señal y(t) = sen(2*pi*f*t), f=1.2,
% enventanada entre 0 y 1.
y =
signal_box('sin',struct('t0',0,'t1',1,'f',1.2),delta_t);
% Visualizamos la señal.
figure; signal_plot(y);
```

Complementos formativos

Visualización de espectros y constatación de que se satisface el T. de Plancherel.

```
% Calculamos las transformadas de Fourier
% con amplificación por 10 de la resolución espectral
% para visualizarlas mejor.
% Las transformadas se almacenan en una estructura del
mismo tipo.
xf = signal_ft(x,10);
yf = signal_ft(y,10);
% Visualizamos el módulo de las transformadas.
figure; signal_plot(signal_map(xf,@abs));
figure; signal_plot(signal_map(yf,@abs));
```

Complementos formativos

Visualización de espectros y constatación de que se satisface el T. de Plancherel.

```
% Calculamos el producto escalar de las señales iniciales.
signal_sp(x,y)
% Calculamos el producto escalar de sus transformadas.
signal_sp(xf,yf)
```

Problemas resueltos de la sección

Problemas 1.1, 1.2, 1.8

Modelado probabilístico del ruido

- Procesos estacionarios
- Ruido gaussiano
- Representación vectorial del ruido

Procesos estacionarios gaussianos

Un **proceso estocástico real de tiempo continuo** es una familia de variables aleatorias indexadas por una variable continua: $x(t),\ t \in \mathbf{R}$.

Está caracterizado por las distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias multidimensionales que definimos cuando seleccionamos n valores de t:

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n),\ X_i = x(t_i).$$

Un proceso de este tipo es *estacionario* si su caracterización probabilística no varía en el tiempo, es decir, si

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = f_{X'_1,\ldots,X'_n}(x_1,\ldots,x_n),$$

$$X_i = x(t_i),\ X'_i = x(t_i+\Delta t)$$

Procesos estacionarios gaussianos

Una **variable aleatoria gaussiana multidimensional de media nula** se caracteriza por la fdp

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{L/2}|\Sigma|^{L}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}^{\top}\Sigma^{-1}\mathbf{x}\right).$$

donde Σ es la matriz de varianzas-covarianzas:

$$\Sigma = (\sigma_{ij}^2),\ \sigma_{ij}^2 = E[X_i X_j]$$

Por tanto la fdp está determinada completamente por las varianzas-covarianzas.

Procesos estacionarios gaussianos

Un **proceso gaussiano de media nula** es aquél cuyos conjuntos de muestras son gaussianas de media nula.
Está por tanto caracterizado por las varianzas y covarianzas de sus muestras:

$$E[x(t)x(t+\tau)]$$

Si el proceso es además **estacionario**, estos parámetros no dependen de t.
Se define entonces la *función de autocorrelación* del proceso como

$$R_x(\tau) = E[x(t+\tau)x(t)]$$

Procesos estacionarios gaussianos

Se define la **densidad espectral de potencia** del proceso como la TF de la función de autocorrelación:

$$S_x(f) = \mathcal{F}\left[R_x(\tau)\right].$$

El nombre se justifica por la relación

$$E[|x(t)|^2] = E[x(t+0)x(t)] = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)df.$$

Ruido gaussiano

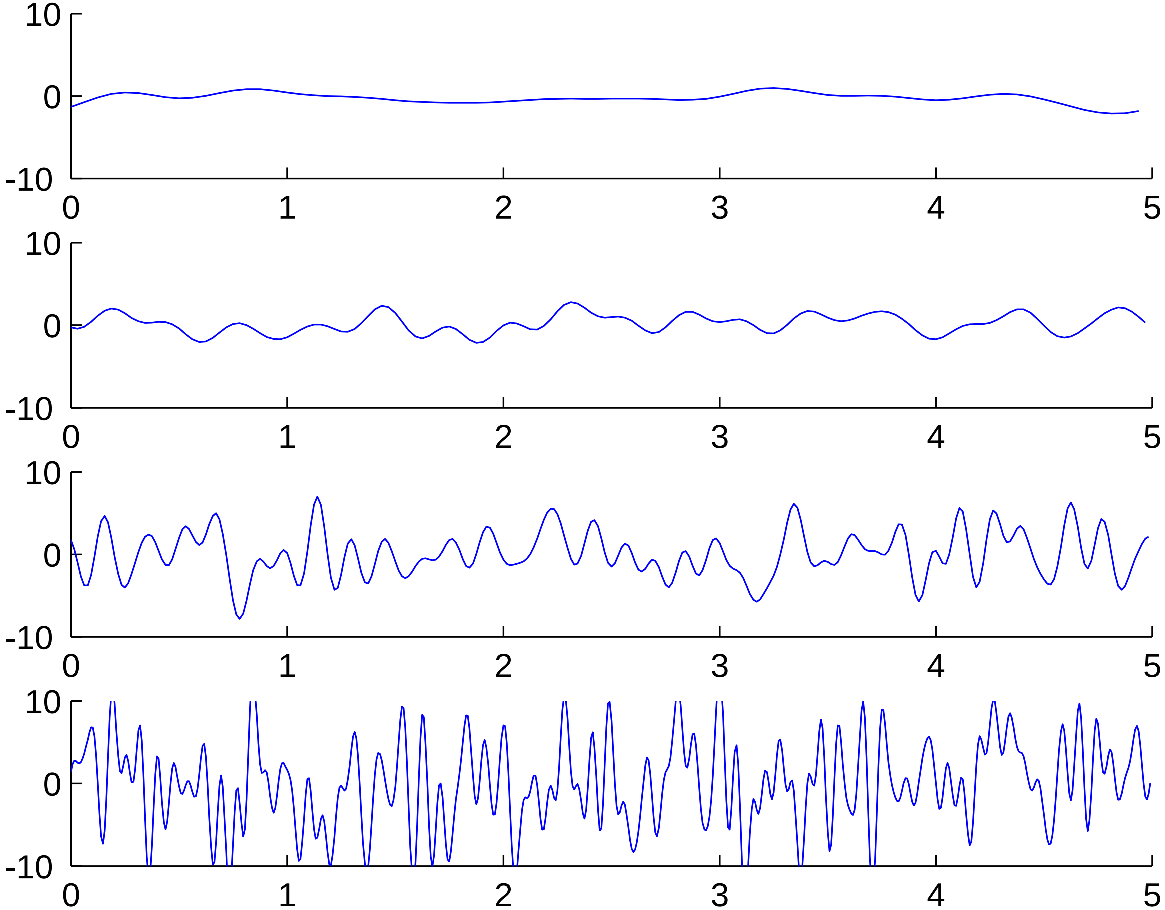
El ruido en los sistemas de comunicaciones (ruido térmico) se modela como un *proceso estocástico estacionario gaussiano con media nula*. Su densidad espectral de potencia es aproximadamente constante en el rango de frecuencias utilizado en la práctica, de forma que se considera constante

$$S_n(f) = \frac{N_0}{2}.$$

El parámetro $N_0/2$ se denomina *densidad espectral de potencia bilateral (depb)*.

Ruido gaussiano

Ruido blanco gaussiano con distintas limitaciones en banda
¿Qué ocurriría sin limitación en banda?

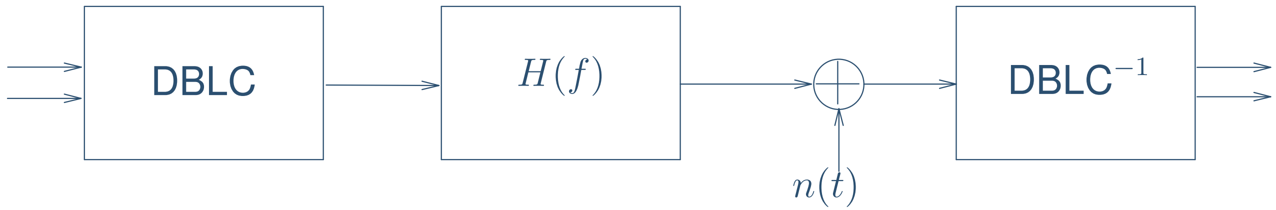


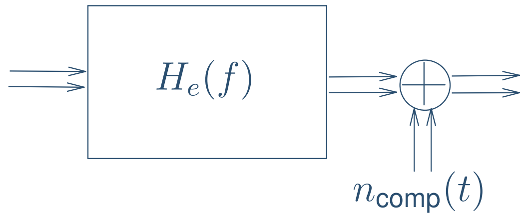
Ruido gaussiano

El ruido térmico a la entrada de un demodulador DBLC se manifiesta a la salida como

$$n_{\text{comp}}(t) = n_c(t) + jn_s(t),$$

con $n_c(t)$, $n_s(t)$ procesos de **ruido blanco gaussiano limitado en banda independientes**, cada uno de ellos con depb N_0.





Representación vectorial del ruido

$\{\phi_j\}_{j=0}^{L-1}$ sistema ortonormal

$$n(t) = n_0\phi_0(t) + ... + n_{L-1}\phi_{L-1}(t) + n_{\text{ort}}(t)$$

$$n_i = \langle n(t), \phi_i(t)\rangle$$

Representación vectorial del ruido

$\{\phi_j\}_{j=0}^{L-1}$ sistema ortonormal

$$n(t) = n_0\phi_0(t) + \ldots + n_{L-1}\phi_{L-1}(t) + n_{\text{ort}}(t)$$

$$n_i = \langle n(t), \phi_i(t) \rangle$$

Caso real:

$n(t)$ ruido blanco gaussiano real con depb $N_0/2$

- n_i gaussianos independientes de media nula y varianza $N_0/2$
- $n_{\text{ort}}(t)$ independiente de los n_i

Representación vectorial del ruido

Comprobamos lo primero:

$$
\begin{aligned}
E[n_i n_j] &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} n(t)\phi_i(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} n(u)\phi_j(u)du\right] \\
&= E\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} n(t)n(u)\phi_i(t)\phi_j(u)dtdu\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E\left[n(t)n(u)\right]\phi_i(t)\phi_j(u)dtdu \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_n(t-u)\phi_i(t)\phi_j(u)dtdu \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2}\delta(t-u)\phi_i(t)\phi_j(u)dtdu \\
&= \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-u)\phi_i(t)dt\right]\phi_j(u)du \\
&= \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_i(u)\phi_j(u)du = \frac{N_0}{2}\delta_{ij}.
\end{aligned}
$$

Representación vectorial del ruido

La fdp de la variable aleatoria de ruido

$$\mathbf{n} = (n_0, \ldots, n_{L-1})$$

es por tanto, con $\sigma^2 = N_0/2$,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{n}) &= \prod_{i=0}^{L-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{n_i^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{L/2}\sigma^L} \prod_{i=0}^{L-1} \exp\left(-\frac{n_i^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{L/2}\sigma^L} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{n}\|^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

Representación vectorial del ruido

$\{\phi_j\}_{j=0}^{L-1}$ sistema ortonormal

$$n(t) = n_0\phi_0(t) + ... + n_{L-1}\phi_{L-1}(t) + n_{\text{ort}}(t)$$

$$n_i = \langle n(t), \phi_i(t) \rangle$$

Caso complejo:

$n(t) = n_c(t) + jn_s(t)$, $n_c(t), n_s(t)$ procesos de ruido blanco gaussiano independientes limitados en banda con depb N_0

$\phi_i(t)$ con la misma limitación en banda

$n_i = n_{ic} + jn_{is}$

- n_{ic}, n_{is} gaussianos independientes de media nula y varianza N_0
- $n_{\text{ort}}(t)$ independiente de los n_i

Representación vectorial del ruido

La fdp de la variable aleatoria de ruido

$$\mathbf{n} = (n_{0c}, n_{0s}, \ldots, n_{L-1,c}, n_{L-1,s})$$

es por tanto, con $\sigma^2 = N_0$,

$$f(\mathbf{n}) = \frac{1}{(2\pi)^L \sigma^{2L}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{n}\|^2}{2\sigma^2}\right)$$

Problemas de la sección

Problema 1.3

Receptores óptimos para símbolos aislados

1. Estimación bayesiana
2. El problema
3. De señales a vectores
4. Decisión óptima
5. Implementaciones
6. Ejemplos

Estimación bayesiana

Consideramos

- Una variable aleatoria discreta I *(incógnita)* que puede tomar los valores $\{a_0, ..., a_{N-1}\}$ con probabilidades respectivas $P_0, ..., P_{N-1}$.
- Una variable aleatoria continua multidimensional $\mathbf{X} = (X_0, ..., X_{L-1})$ *(observación)*, dependiente de I, caracterizada por las funciones de densidad de probabilidad condicional
$$f_{\mathbf{X}}(x_0, ..., x_{L-1}|a_i).$$

Estimación bayesiana

Problema:
Estimar I (desconocida) a partir de $\mathbf{X}$ (conocido) de forma que la probabilidad de error en la estimación sea mínima, es decir, maximicemos la probabilidad de acierto

$$P_A = P[I = \mathrm{dec}(\mathbf{X})]$$

La decisión óptima dec^* está dada por el criterio

$$\mathrm{dec}^*(\mathbf{x}) = \arg\max_{a_i} P[I = a_i | \mathbf{X} = \mathbf{x}].$$

(criterio de *máxima probabilidad a posteriori (MAP)*)

Estimación bayesiana

En efecto, esta decisión maximiza la probabilidad de acierto:

$$P_A = P[I = \mathrm{dec}(\mathbf{X})] = \int_{\mathbf{R}^L} P[I = \mathrm{dec}(\mathbf{x})|\mathbf{X} = \mathbf{x}] f(\mathbf{x})\, \mathsf{d}\mathbf{x}$$

En términos de los datos iniciales

$$\begin{aligned}\mathrm{dec}^*(\mathbf{x}) &= \arg\max_{a_i} P[I = a_i|\mathbf{X} = \mathbf{x}] \\ &= \arg\max_{a_i} f(\mathbf{x}|a_i) P_i / f(\mathbf{x}) \\ &= \arg\max_{a_i} f(\mathbf{x}|a_i) P_i\end{aligned}$$

Receptores óptimos

Se transmite una de las señales $\{s_i(t)\}_{i=0}^{M-1}$, todas con la misma probabilidad.
$\{\phi_k(t)\}_{k=0}^{L-1}$ sistema ortonormal generador de las señales.
S, subespacio generado por las señales *(espacio de señal)*

$$s_i(t) = s_{i0}\phi_0(t) + \ldots + s_{i,L-1}\phi_{L-1}(t)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{s}_i \equiv (s_{i0}, \ldots, s_{i,L-1})$$

Receptores óptimos

Se transmite una de las señales $\{s_i(t)\}_{i=0}^{M-1}$, todas con la misma probabilidad.
$\{\phi_k(t)\}_{k=0}^{L-1}$ sistema ortonormal generador de las señales.
S, subespacio generado por las señales *(espacio de señal)*

$$s_i(t) = s_{i0}\phi_0(t) + \ldots + s_{i,L-1}\phi_{L-1}(t)$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{s}_i \equiv (s_{i0}, \ldots, s_{i,L-1})$$

Se recibe

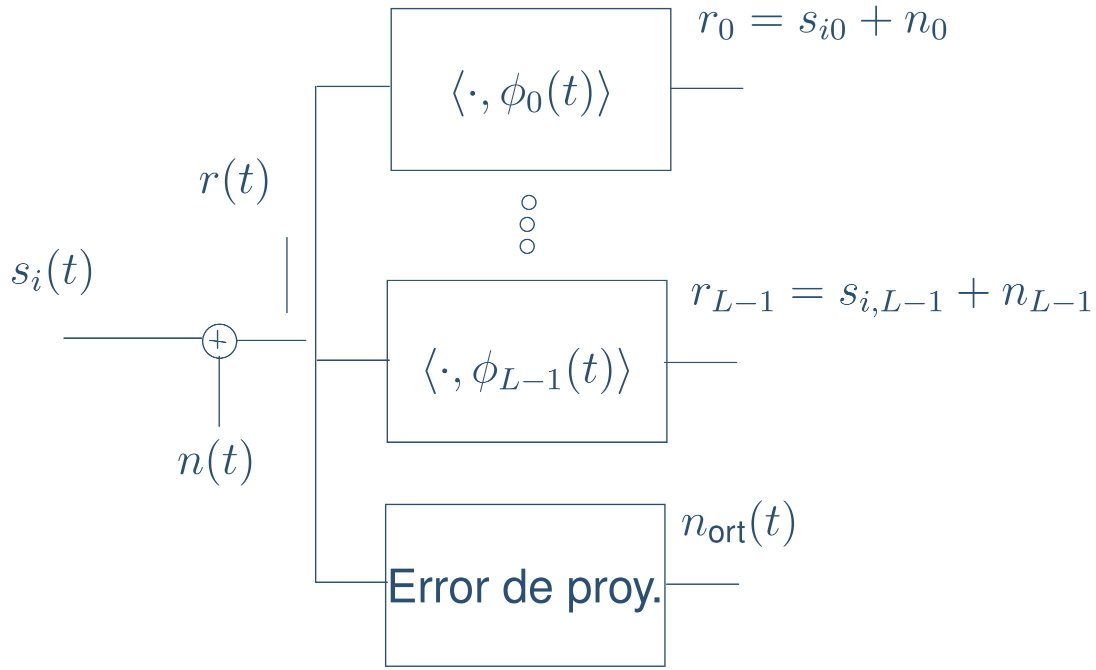
$$r(t) = s_i(t) + n(t)$$

$n(t)$ ruido blanco gaussiano

$$n(t) = n_0\phi_0(t) + \ldots + n_{L-1}\phi_{L-1}(t) + n_{\text{ort}}(t)$$
$$n_k = \langle n(t), \phi_k(t) \rangle$$
$$n_{\text{ort}}(t) \perp S$$

Receptores óptimos

Proyectamos ortogonalmente sobre el subespacio generado por las señales de la modulación *(espacio de señal)*.



Sabemos que $n_{\text{ort}}(t)$ es el error de proyección.
Sabemos que es independiente de los n_k.
Como también es independiente de la señal transmitida $s_i(t)$, *no aporta información útil*.

Problema de estimación bayesiana

Problema de estimación bayesiana

Incógnita: $i \in \{0, \dots, M-1\}$

Probabilidades a priori de la incógnita: $P_i = \frac{1}{M}$

Observación:

$$\mathbf{r} = (r_0, \dots, r_{L-1})|_{s_i} = \mathbf{s}_i + \mathbf{n}$$

Caso real:

$$\mathbf{n} = (n_0, \dots, n_{L-1})$$

n_k independientes de media nula y varianza $\sigma_n^2 = \dfrac{N_0}{2}$

Fdp condicional de la observación:

r_k idem pero con medias s_{ik}

$$f(r_0, \dots, r_{L-1}|s_i) = c \exp -\frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|^2}{2\sigma_n^2}$$

Problema de estimación bayesiana

Problema de estimación bayesiana

Incógnita: $i \in \{0, \ldots, M-1\}$

Probabilidades a priori de la incógnita: $P_i = \frac{1}{M}$

Observación:

$$\mathbf{r} = (r_0, \ldots, r_{L-1})|_{s_i} = \mathbf{s}_i + \mathbf{n}$$

Caso complejo:

$$\mathbf{n} = (n_{0c}, n_{0s}, \ldots, n_{L-1,c}, n_{L-1,s})$$

n_{kc}, n_{ks} independientes de media nula y varianza $\sigma_n^2 = N_0$

Fdp condicional de la observación:

r_{kc}, r_{ks} idem pero con medias s_{ikc}, s_{iks}

$$f(r_0, \ldots, r_{L-1}|s_i) = c \exp -\frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|^2}{2\sigma_n^2}$$

Decisión óptima

$$
\begin{aligned}
\mathrm{dec}^*(\mathbf{r}) &= \arg\max_i P[s_i|\mathbf{r}] = \arg\max_i \frac{f_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}|s_i)P_i}{f_{\mathbf{r}}(r)} \\
&= \arg\max_i f_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}|s_i) \\
&= \arg\max_i \exp -\frac{\|\mathbf{r}-\mathbf{s}_i\|^2}{2\sigma_n^2} \\
&= \arg\min_i \|\mathbf{r}-\mathbf{s}_i\|^2
\end{aligned}
$$

El criterio obtenido se denomina, por razones obvias, *criterio de mínima distancia.*

Decisión óptima

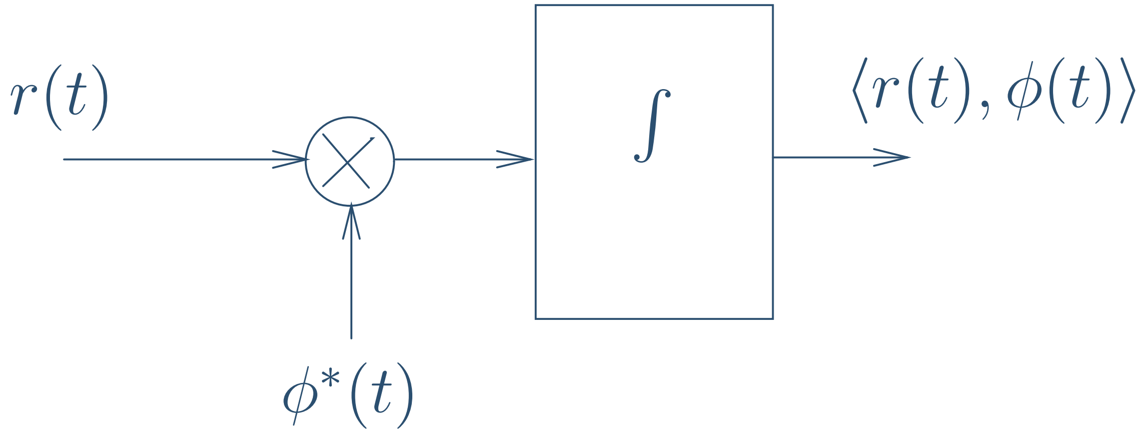
Caso particular: Señales equiprobables de la misma energía

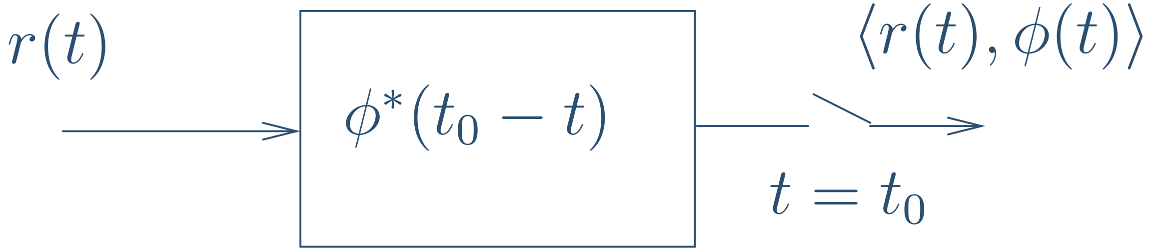
$$
\begin{aligned}
\operatorname{dec}^*(\mathbf{r}) &= \arg\min_i \|\mathbf{r}-\mathbf{s_i}\|^2 \\
&= \arg\min_i \langle \mathbf{r}-\mathbf{s}_i, \mathbf{r}-\mathbf{s}_i \rangle \\
&= \arg\min_i \langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle + \langle \mathbf{s}_i, \mathbf{s}_i \rangle - (\langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_i \rangle + \langle \mathbf{s}_i, \mathbf{r} \rangle) \\
&= \arg\max_i 2\,\mathrm{Re}\ \langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_i \rangle - \mathcal{E}_i \\
&= \arg\max_i 2\,\mathrm{Re}\ \langle r(t), s_i(t) \rangle - \mathcal{E}_i \\
&= \arg\max_i\ \mathrm{Re}\ \langle r(t), s_i(t) \rangle
\end{aligned}
$$

Este criterio se conoce como de *máxima correlación.*

Implementaciones del receptor óptimo

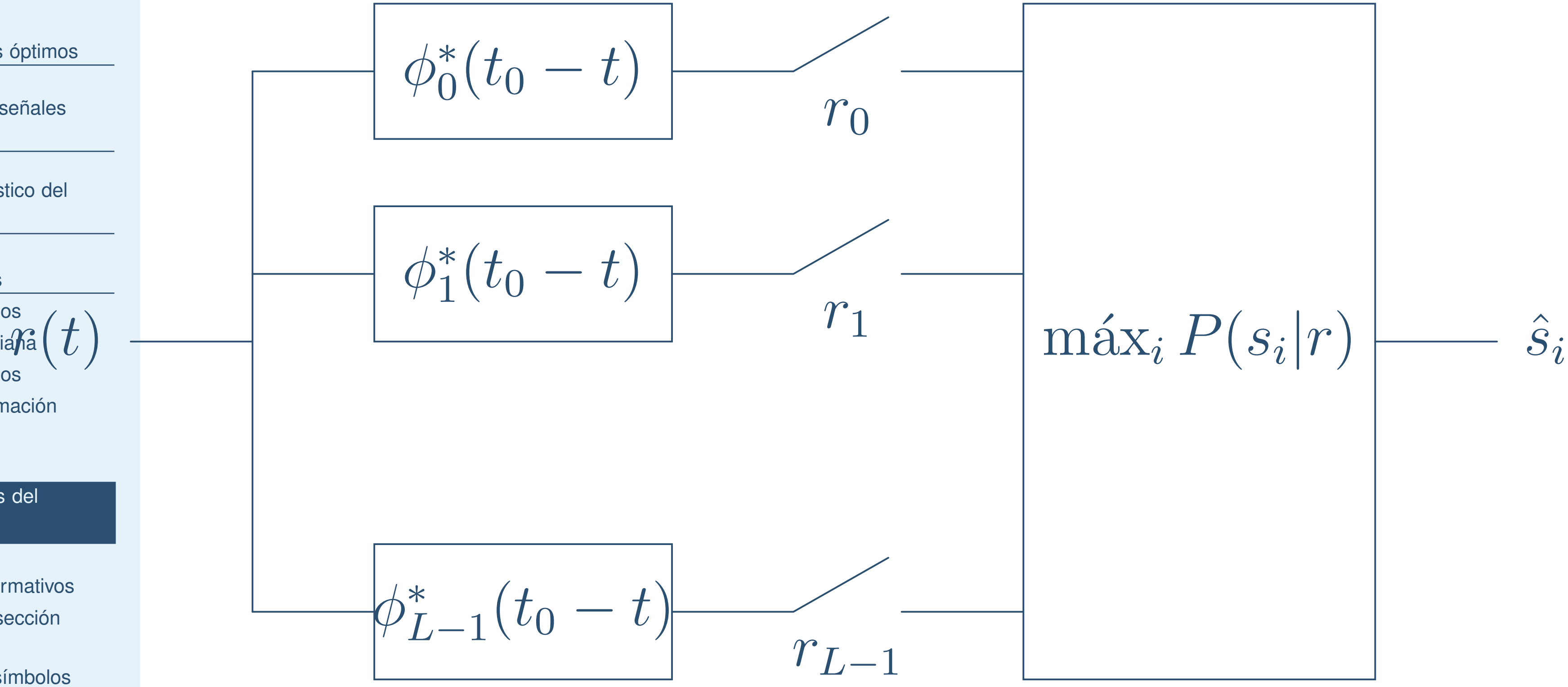
Implementaciones del producto escalar





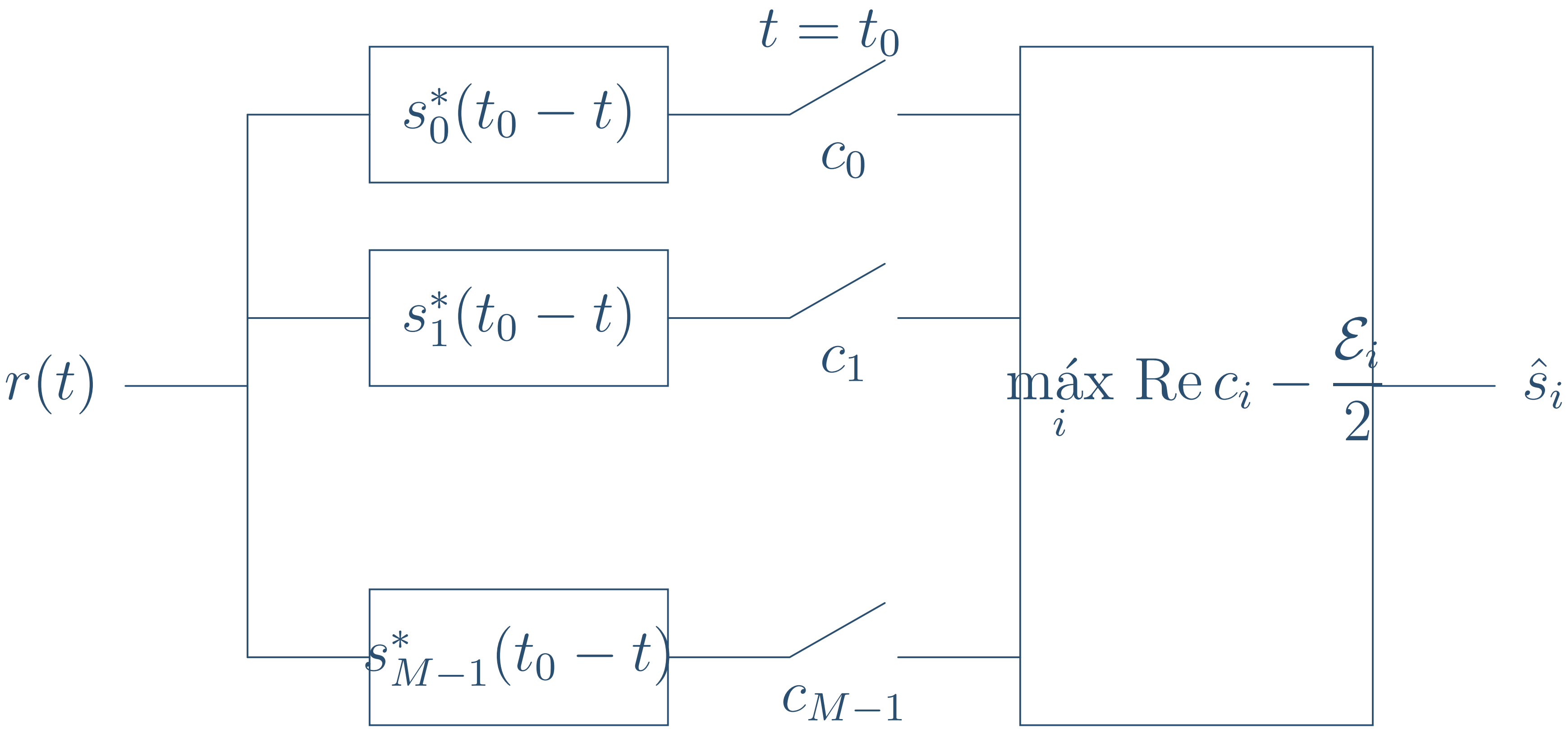
Implementaciones del receptor óptimo

Con filtros adaptados a las señales de la base



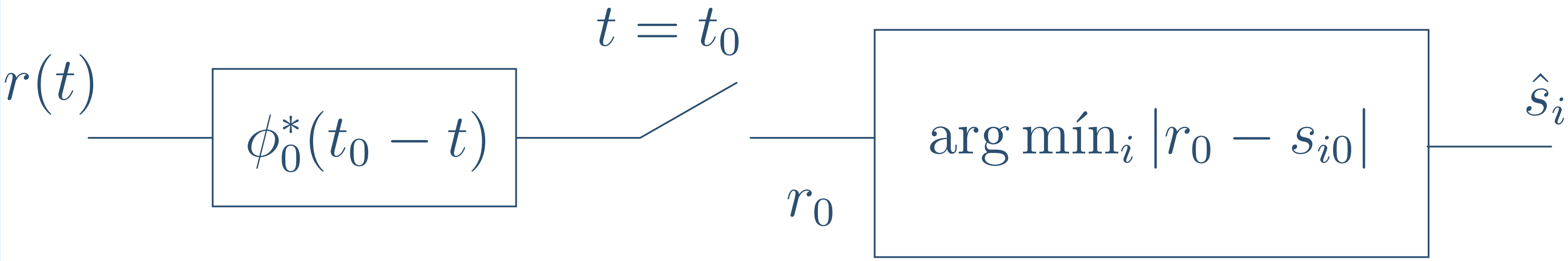
Implementaciones del receptor óptimo

Con filtros adaptados a las señales de la modulación (señales equiprobables)



Ejemplos

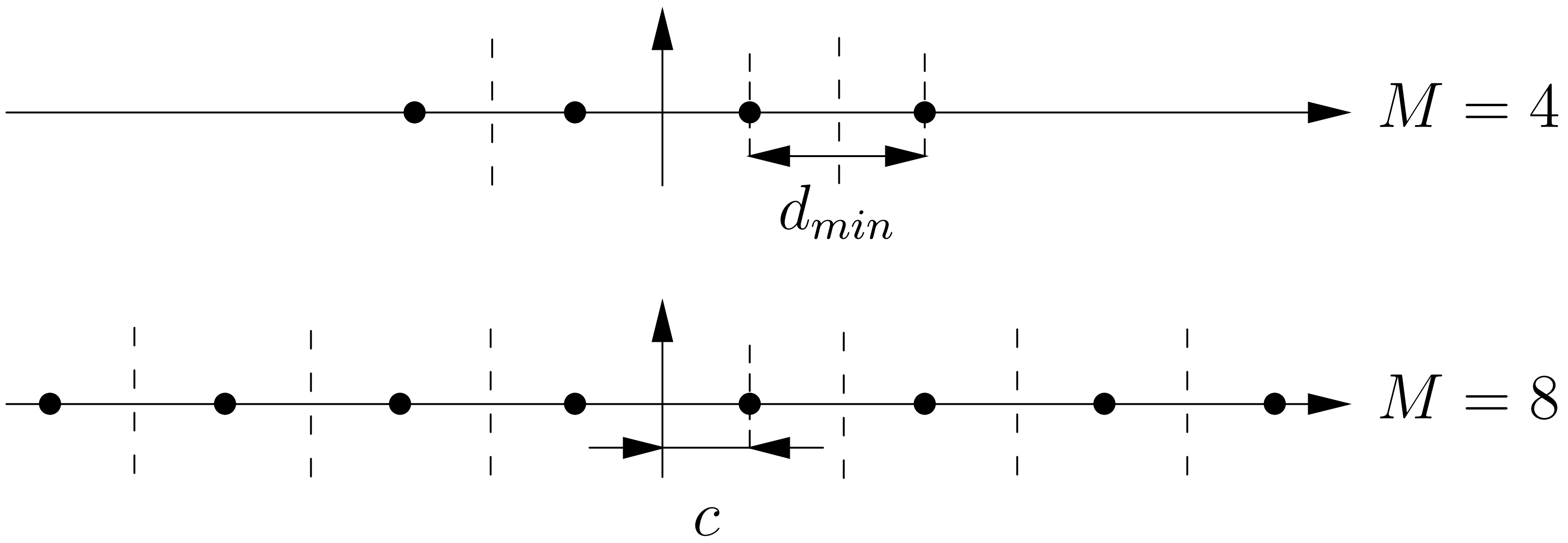
Modulaciones unidimensionales



Ejemplos

Modulación unidimensional real: *Pulse amplitude modulation (PAM)*

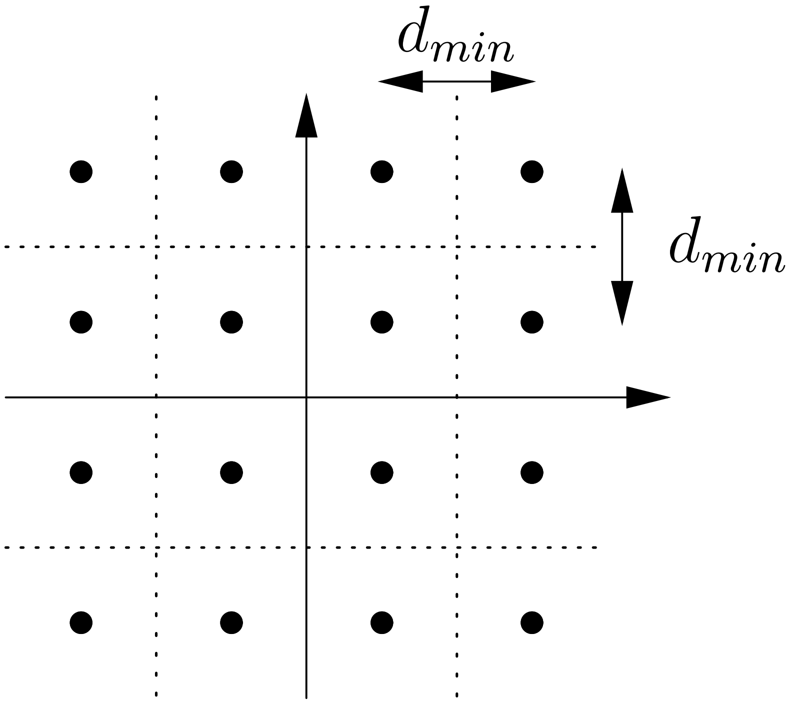
$s_i(t) = A_i \phi_0(t)$.



Ejemplos

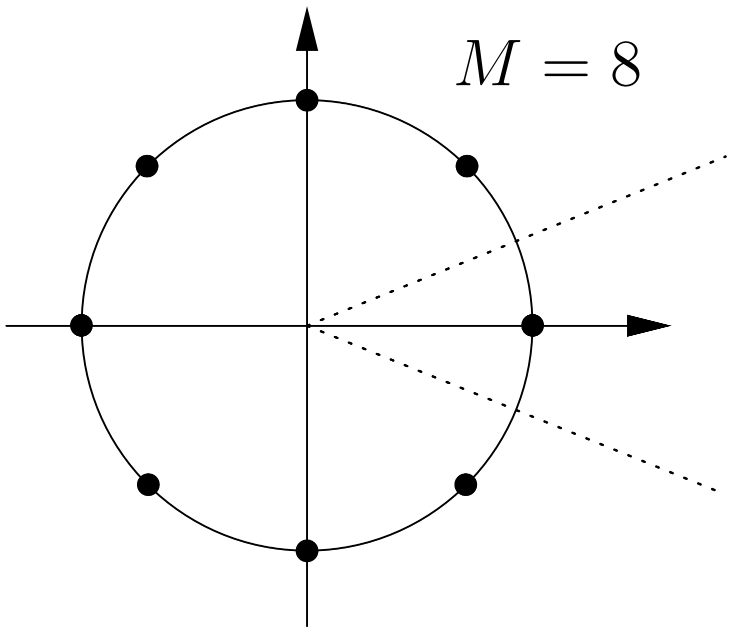
Modulación unidimensional compleja: *Quadrature amplitude modulation (QAM)*

$s_i(t) = (B_i + jC_i)\phi_0(t)$



Modulación unidimensional compleja: *Phase-Shift Keying (PSK)*

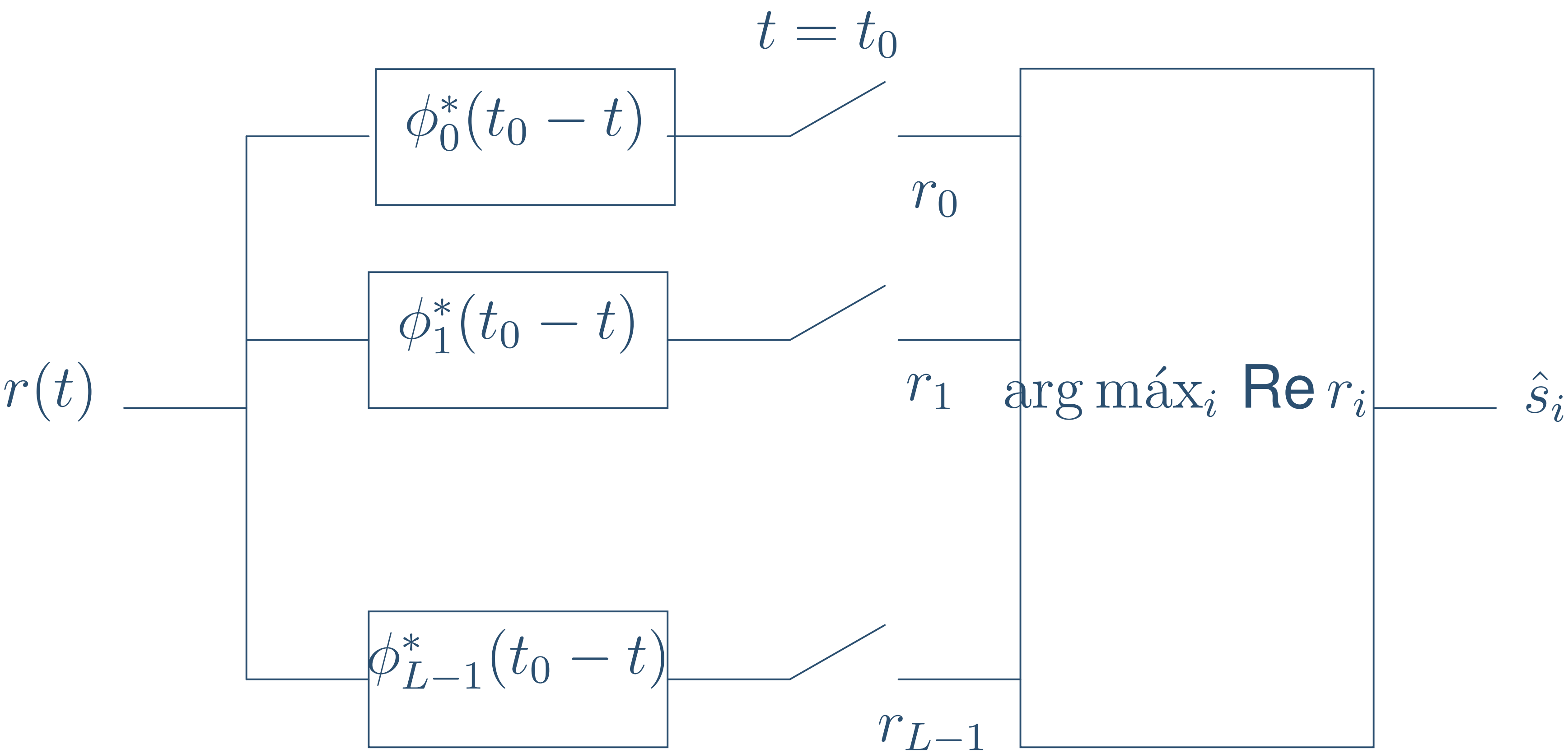
$$s_i(t) = Ae^{j2\pi(i-1)/M}\phi_0(t)$$



Ejemplos

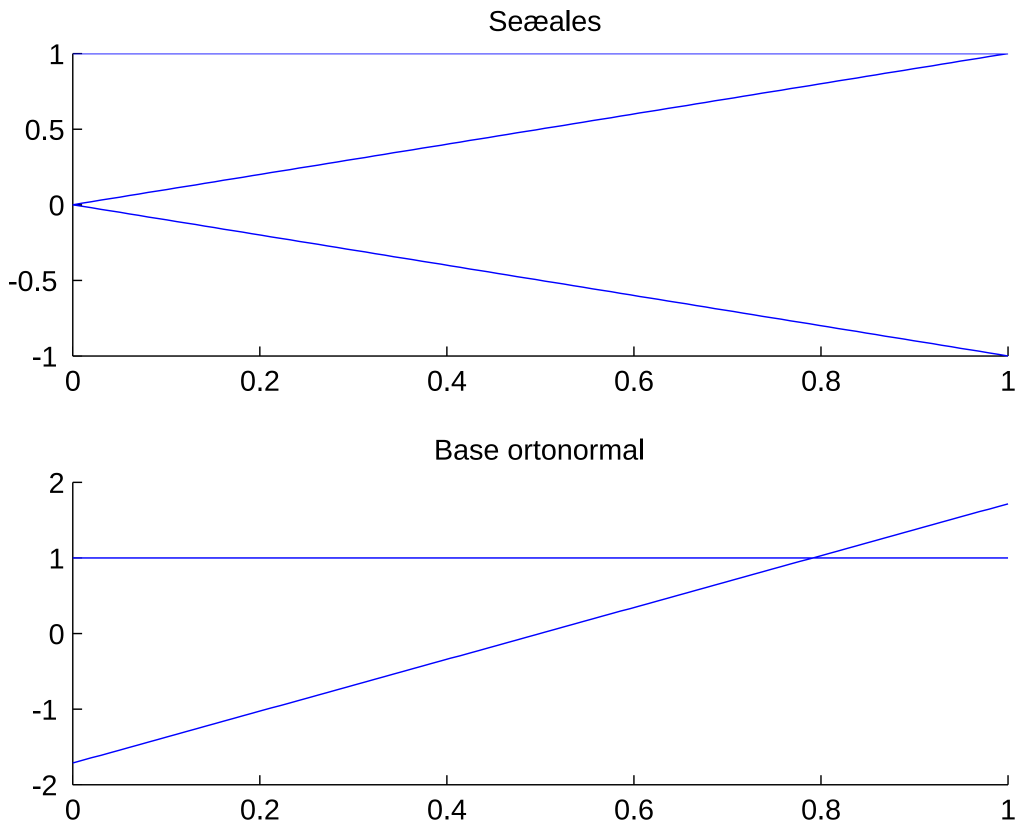
Modulación de dimensión $L = M$: *Modulación ortogonal* (caso particular es FSK)

$s_i(t) = A\phi_i(t)$



Complementos formativos

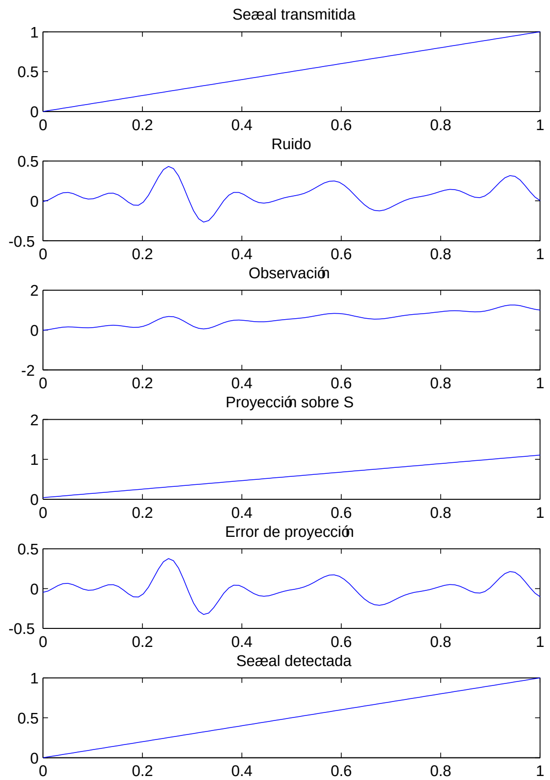
El script `rec_opt.m` simula el proceso de transmisión y detección óptima de una señal.
Señales de una modulación y base ortonormal



Complementos formativos

El script `rec_opt.m` simula el proceso de transmisión y detección óptima de una señal.

Ejemplo de un proceso de detección



Problemas de la sección

Problemas 1.4, 1.5, 1.6

Interferencia entre símbolos

En este tema estudiamos las condiciones para que podamos detectar las señales de una secuencia como si se transmitieran de forma aislada.
Estas son las *condiciones de no interferencia entre símbolos (IES)*.

1. Condición de no IES unidimensional
2. Ancho de banda mínimo sin IES en el caso unidimensional
3. El caso multidimensional
4. Canal equivalente para el caso unidimensional con IES

Condición de no IES unidimensional

Alfabeto de señales: $s_i(t) = A_i\phi(t)$, $i = 0, \ldots, M-1$,
$\|\phi(t)\| = 1$
$\phi(t)$ se denomina *pulso básico*.
Señal global recibida:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\phi(t-nT)$$

Queremos detectar A_0 mediante el producto escalar

$$\begin{aligned}\langle v(t), \phi(t)\rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \langle \phi(t-nT), \phi(t)\rangle \\ &= A_0 + \sum_{n\neq 0} A_n \langle \phi(t-nT), \phi(t)\rangle\end{aligned}$$

Condición de no IES:

$$\langle \phi(t-nT), \phi(t)\rangle = \delta[n]$$

Condición de no IES unidimensional

Otra interpretación

$$\boxed{h(t) = \phi^*(t_0 - t)} \qquad t = t_0$$

Muestra a la salida del filtro:

$$v(t) * \phi^*(t_0 - t) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \phi(t - nT) \right) * \phi^*(t_0 - t)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \phi(t - nT) * \phi^*(t_0 - t)|_{t=t_0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n r_\phi(t - nT - t_0)|_{t=t_0}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n r_\phi(-nT) = A_0 r_\phi(0) + \sum_{n \neq 0} A_n r_\phi^*(nT)$$

Condición de no IES (equivalente a la anterior):

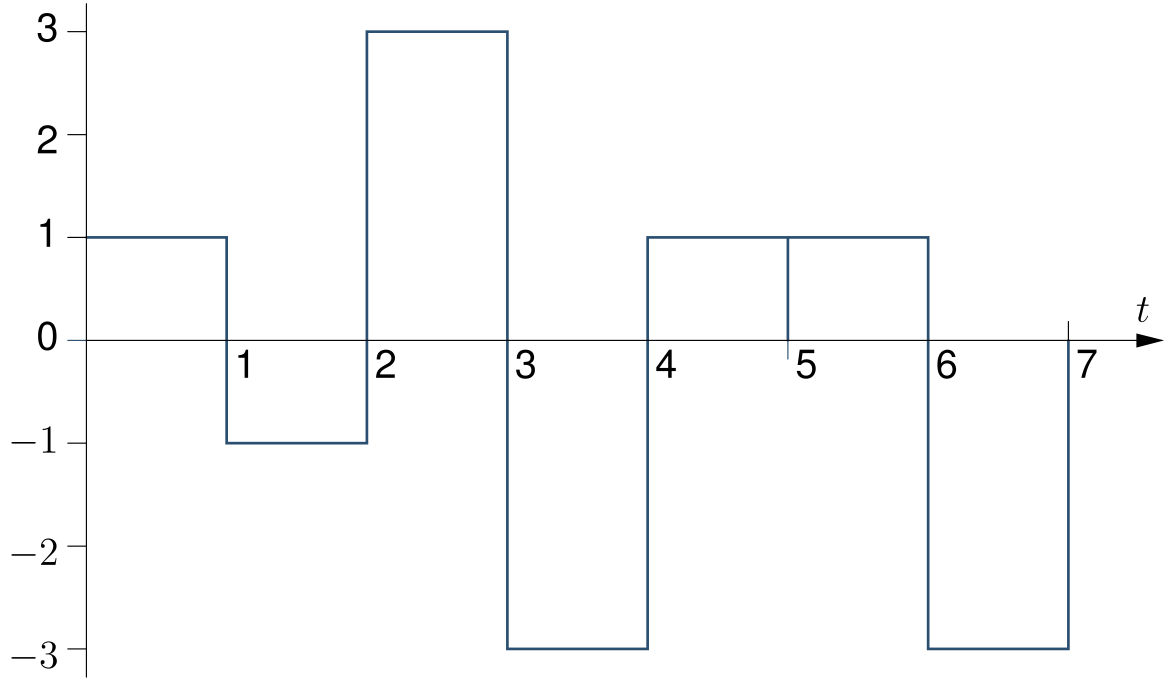
$$r_\phi(nT) = \delta[n]$$

$r_\phi(t)$ se denomina también *pulso filtrado*.

Condición de no IES unidimensional

Ejemplo 1: $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} w_{0,T}(t)$

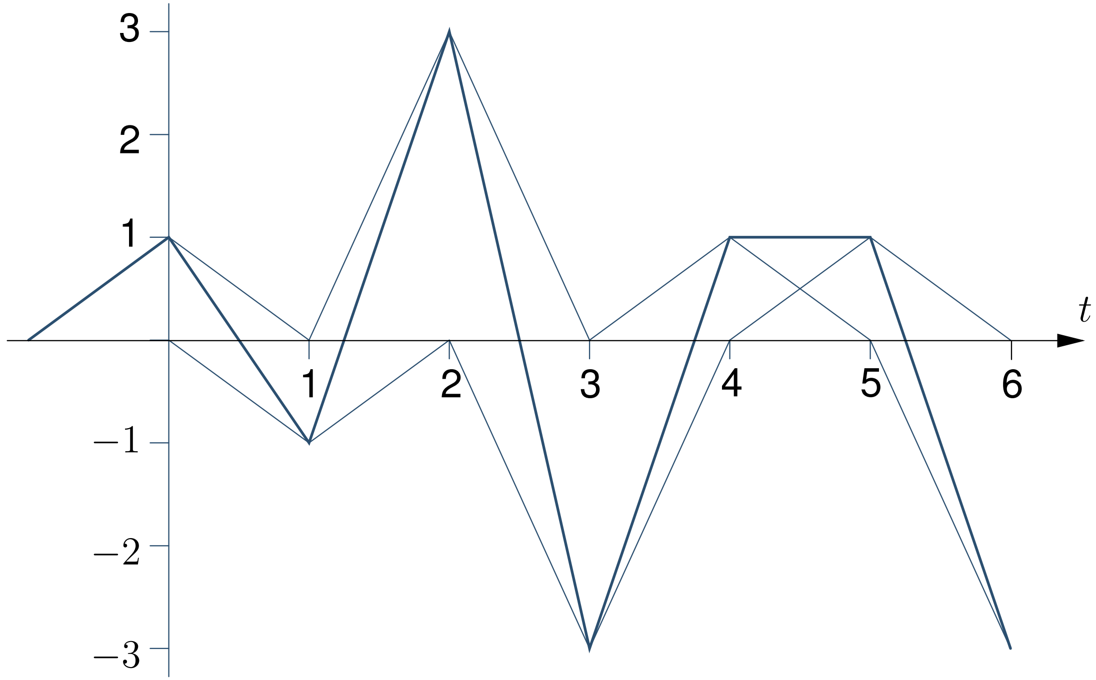
Señal PAM a la entrada del filtro



Condición de no IES unidimensional

Ejemplo 1: $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} w_{0,T}(t)$

Señal PAM a la salida del filtro



Condición de no IES unidimensional

Ejemplo 2: $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$

Ya sabemos que en este caso $\phi(t)$ y $\phi(t-nT)$ son ortogonales.

Pero vamos a comprobar la condición de no IES en términos del pulso filtrado.

$$
\begin{aligned}
r_\phi(t) &= \phi(t) * \phi^*(-t) = \mathcal{F}^{-1}[|\Phi(f)|^2] \\
&= \mathcal{F}^{-1}[|\sqrt{T} w_{-1/(2T),1/(2T)}(f)|^2] = \sqrt{T}\mathcal{F}^{-1}[\sqrt{T} w_{-1/(2T),1/(2T)}(f)] \\
&= \sqrt{T}\frac{1}{\sqrt{T}} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) = \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $r_\phi(t)$ presenta ceros en múltiplos enteros de T, con lo que verifica la condición de no IES.

Condición de no IES en frecuencia

La condición de no IES unidimensional equivale a que la suma de los espectros desplazados de $r_\phi(t)$, es decir, $R_\phi(f) = |\Phi(f)|^2$, sea una constante:

$$r_\phi(nT) = \delta[n]$$

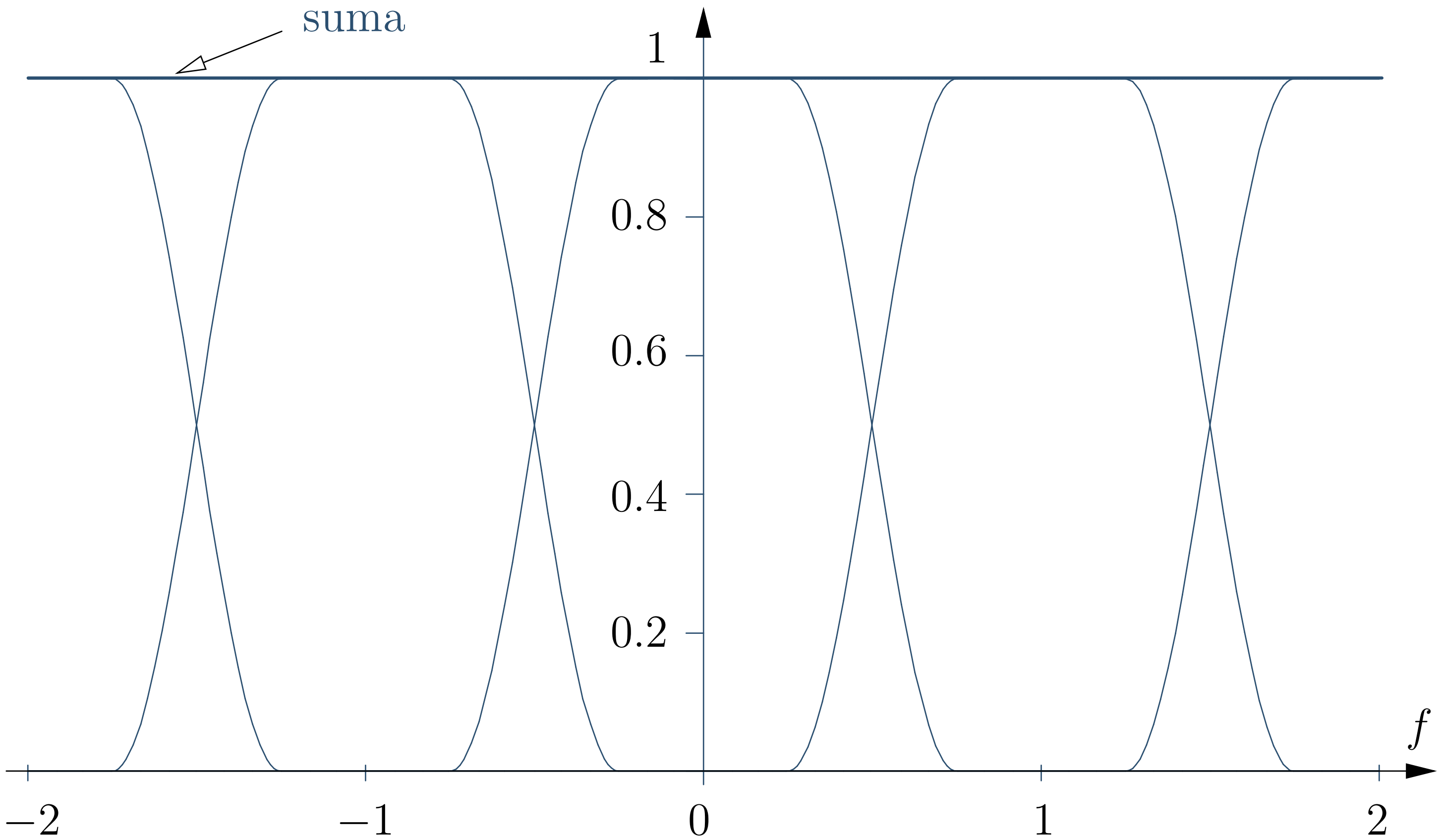
$$\Leftrightarrow r_\phi(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = r_\phi(0)\delta(t)$$

$$\Leftrightarrow R_\phi(f) * \left[\frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)\right] = r_\phi(0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_\phi\left(f - \frac{m}{T}\right) = r_\phi(0)$$

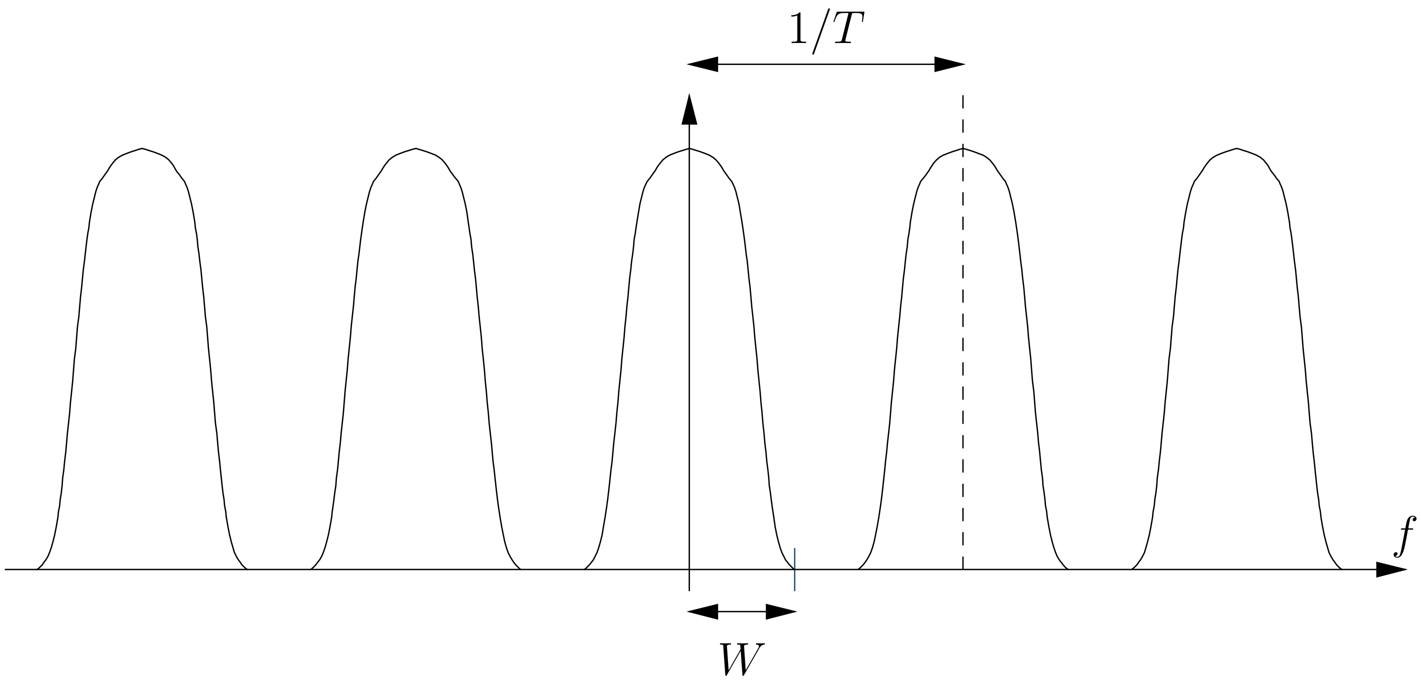
Condición de no IES en frecuencia

La condición de no IES unidimensional equivale a que la suma de los espectros desplazados de $r_\phi(t)$, es decir, $R_\phi(f) = |\Phi(f)|^2$, sea una constante:



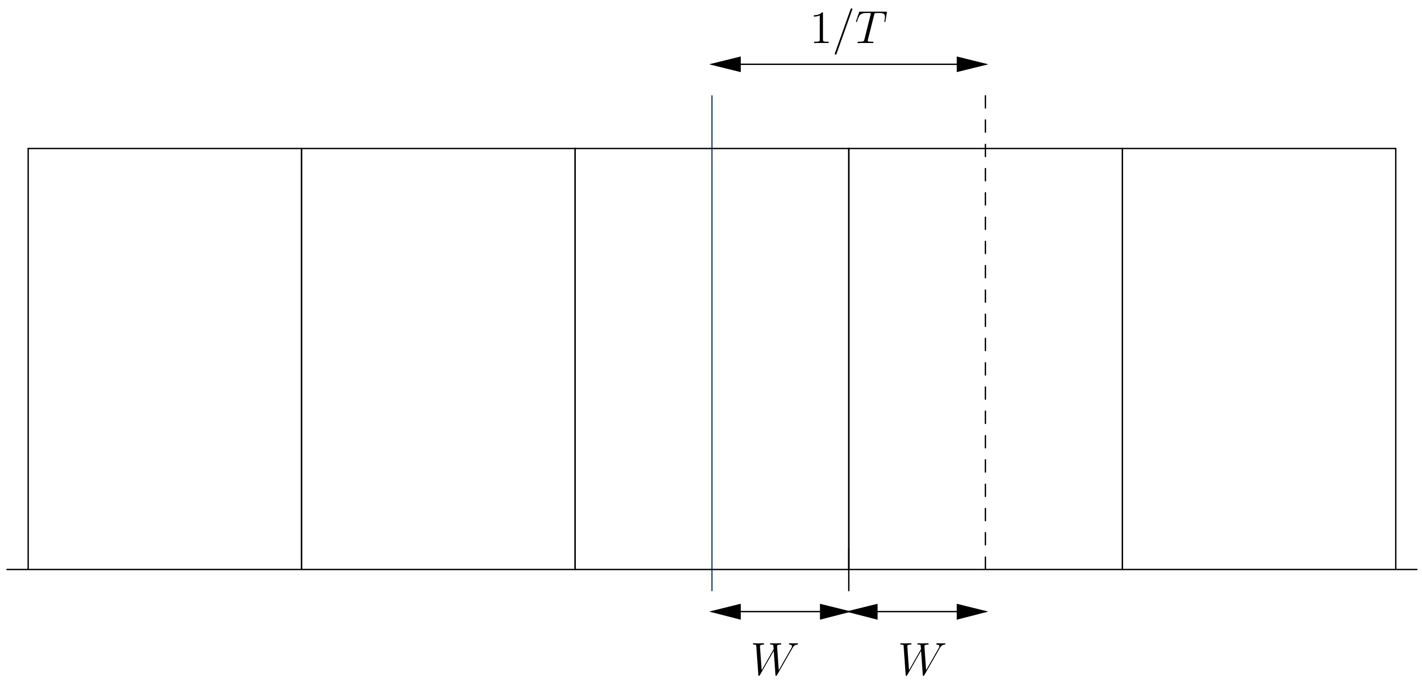
Ancho de banda mínimo sin IES

$$W \text{ (Hz)} < \frac{1}{2T}$$



Ancho de banda mínimo sin IES

$$W \text{ (Hz)} = \frac{1}{2T}$$



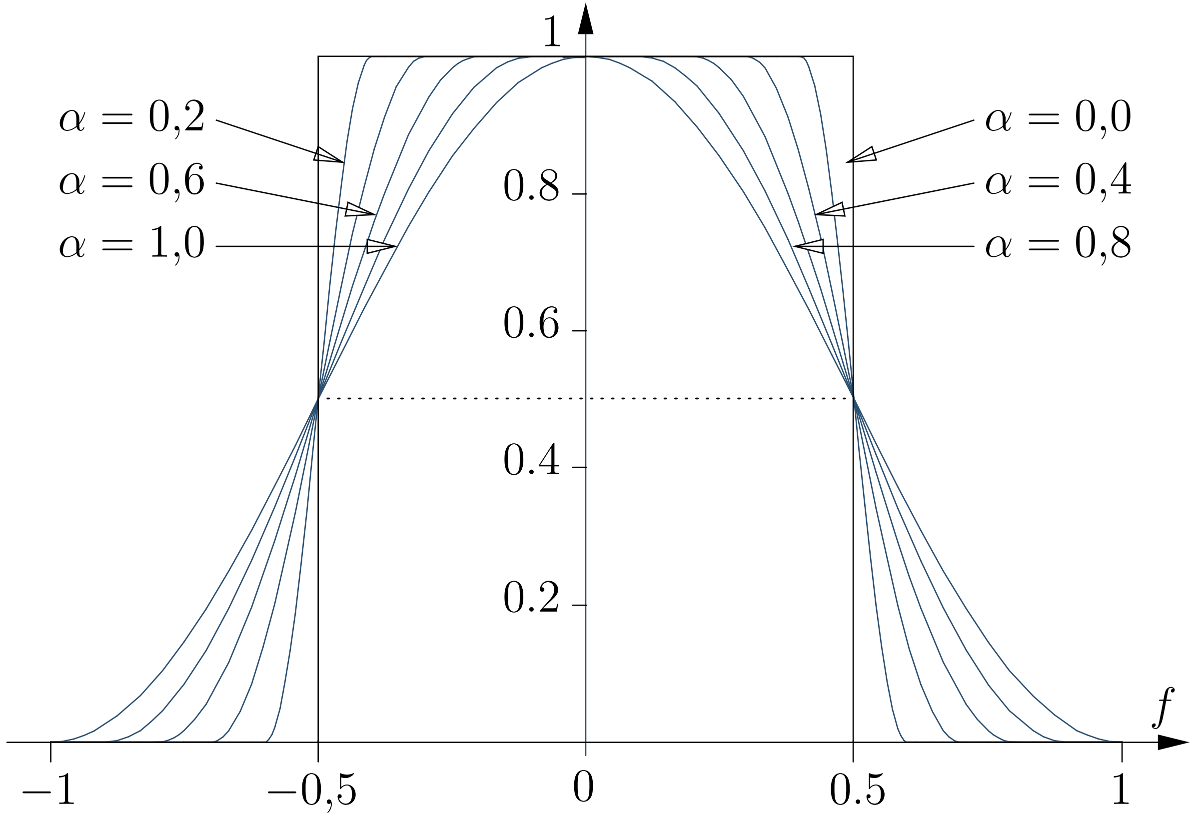
Ancho de banda mínimo sin IES

Por tanto con $r_\phi(t) = \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$ se minimiza el ancho de banda cumpliendo la condición de no IES unidimensional.
Este ancho de banda es

$$\frac{1}{2T}(\text{en } f)$$

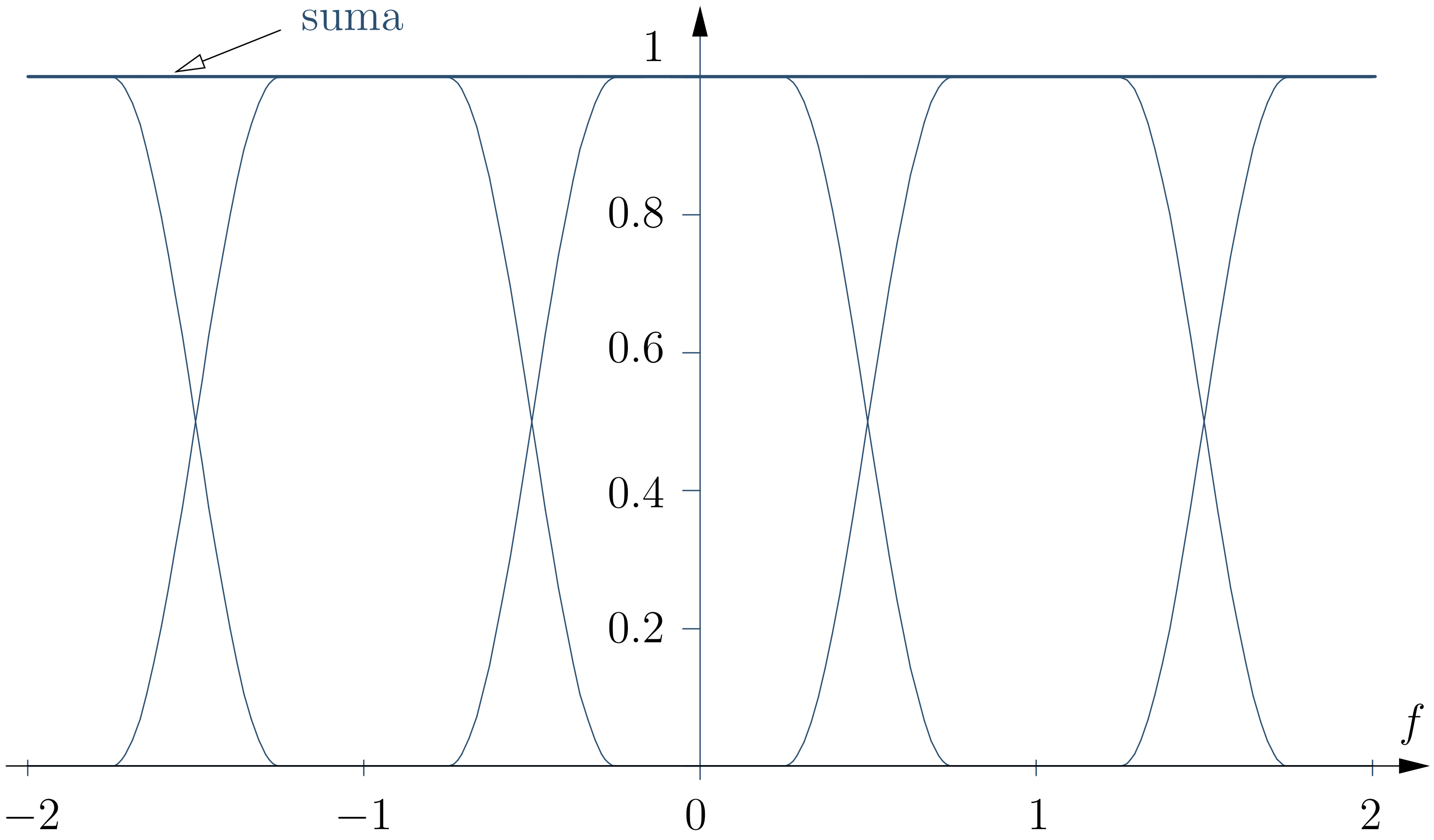
Pulsos en coseno alzado

Familia de espectros $R_\phi(f)$ que cumplen la condición de no interferencia entre símbolos.



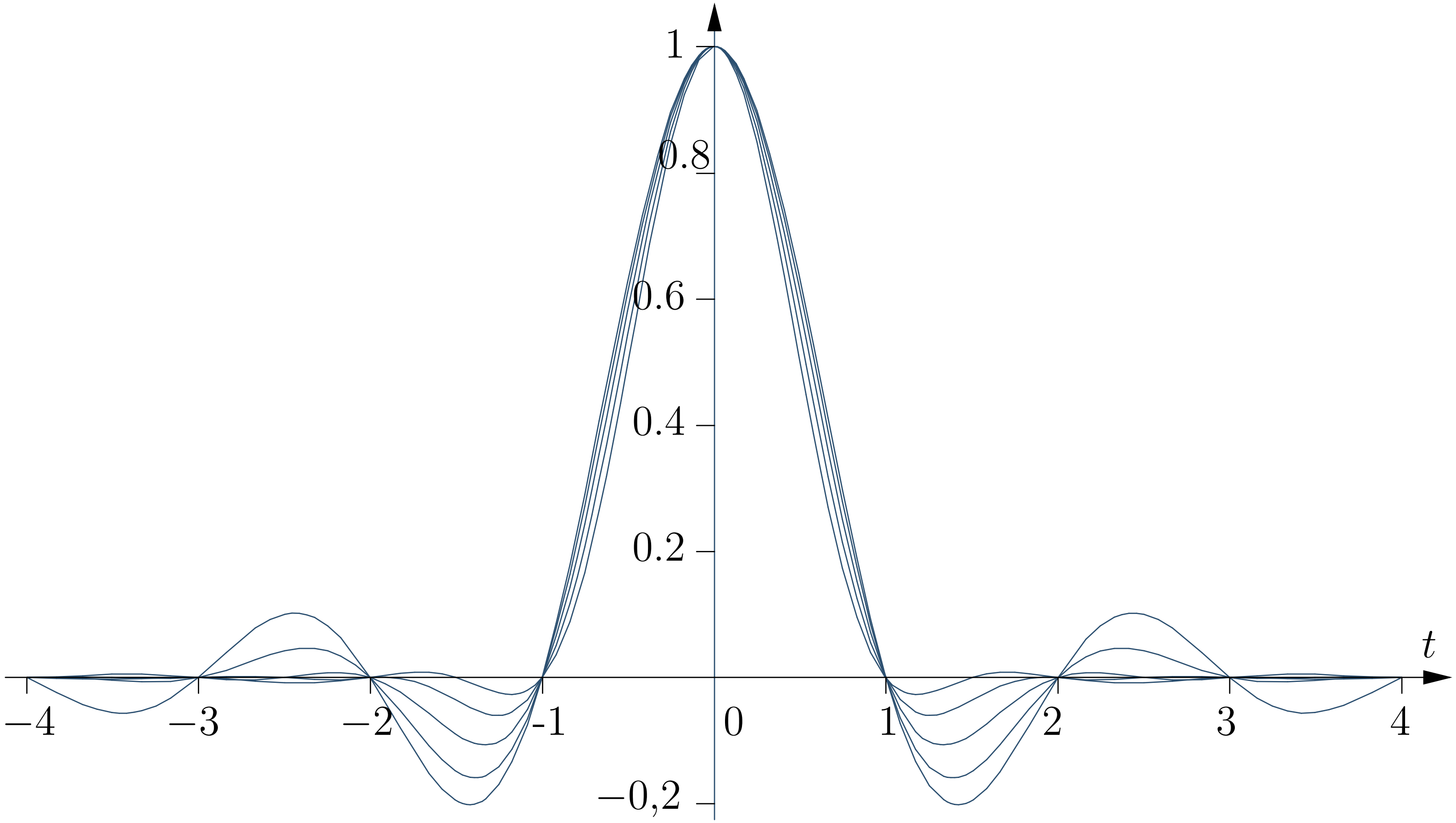
Pulsos en coseno alzado

Familia de espectros $R_\phi(f)$ que cumplen la condición de no interferencia entre símbolos.



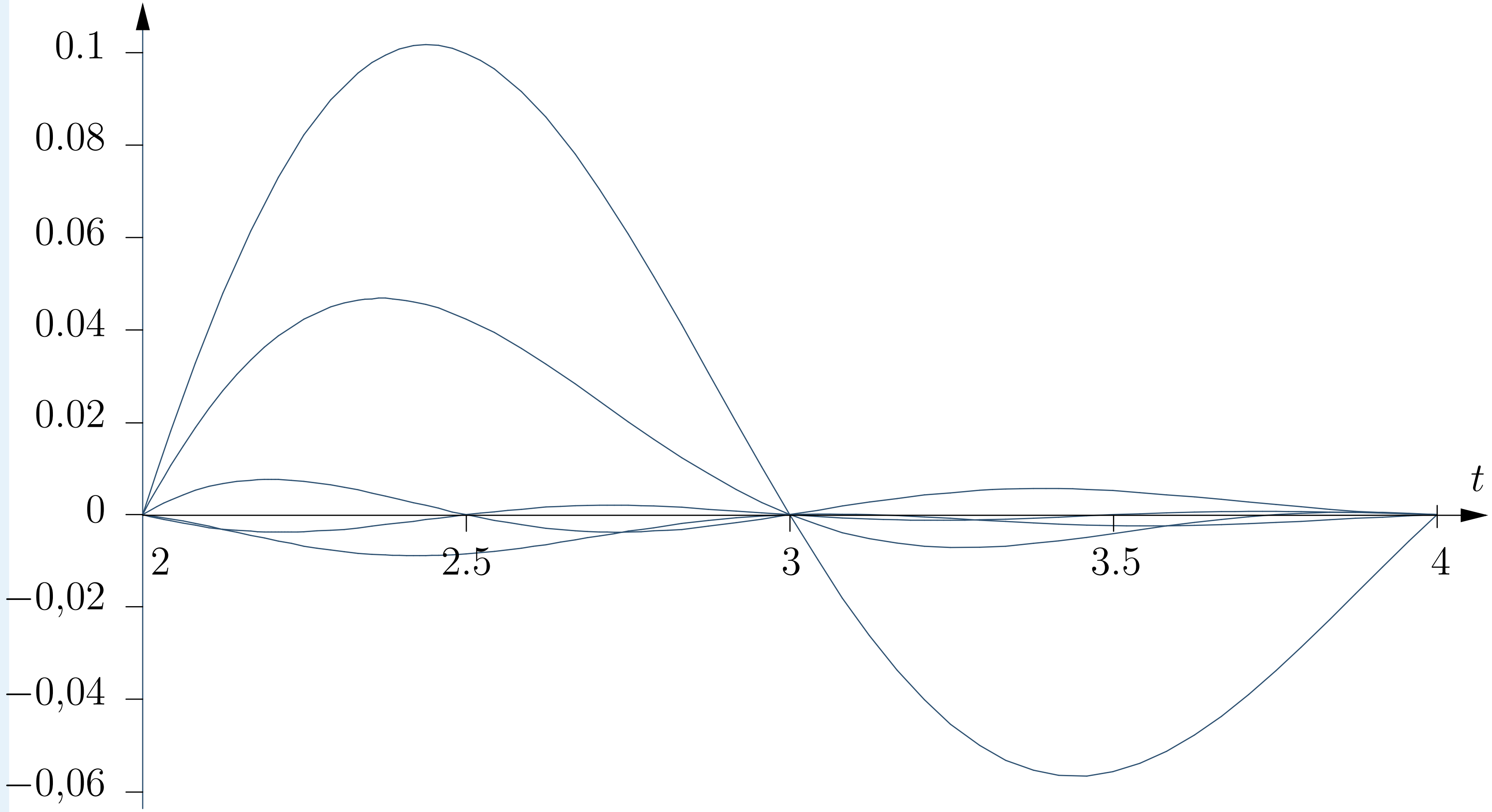
Pulsos en coseno alzado

A mayor ancho de banda, decrecimiento más rápido en el tiempo



Pulsos en coseno alzado

A mayor ancho de banda, decrecimiento más rápido en el tiempo



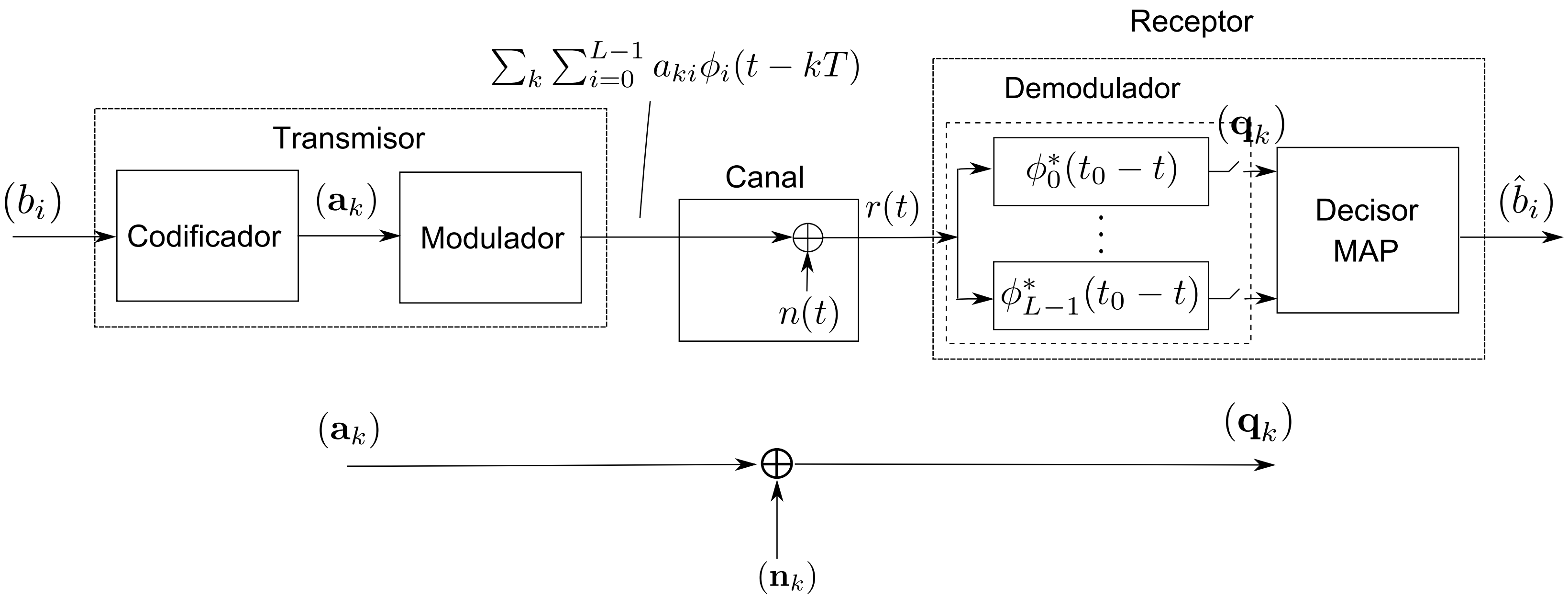
Condición de no IES multidimensional

$$\langle \phi_i(t), \phi_j(t-nT) \rangle = \delta_{ij}\delta[n]$$

Ancho de banda mínimo: el del caso unidimensional multiplicado por L.

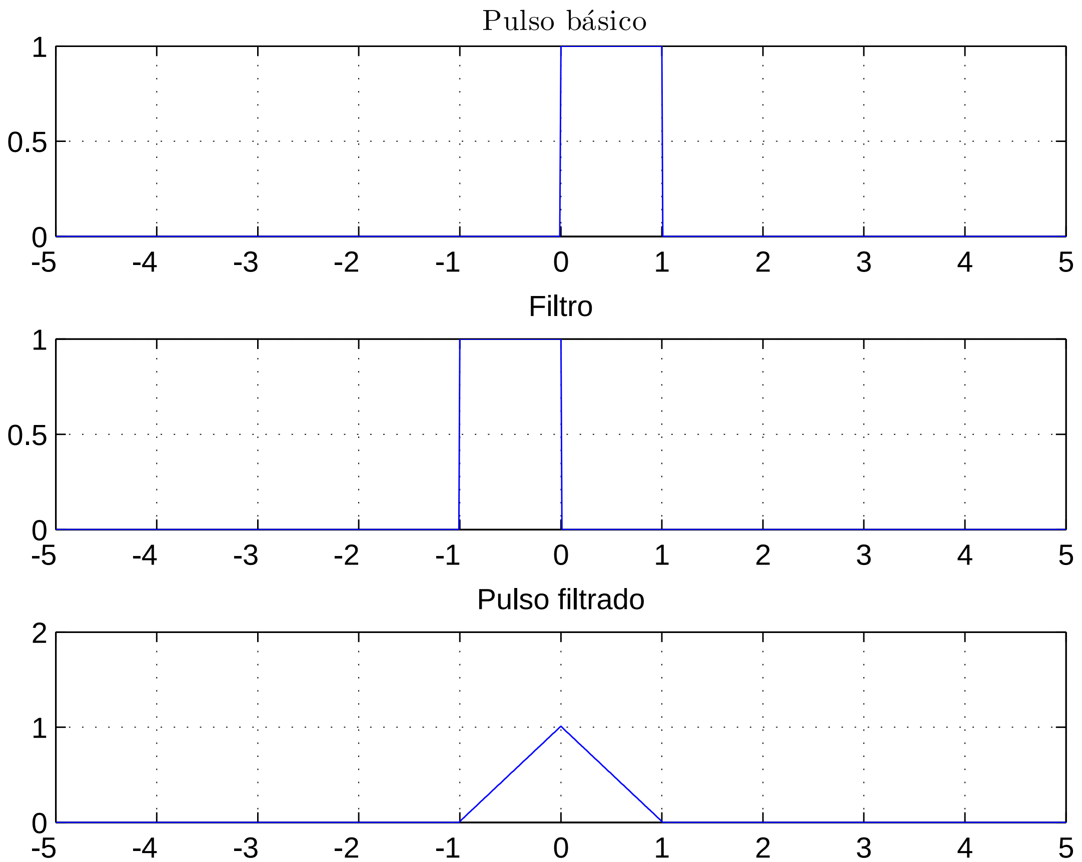
Sistema equivalente sin IES

Consideramos el caso muldimensional

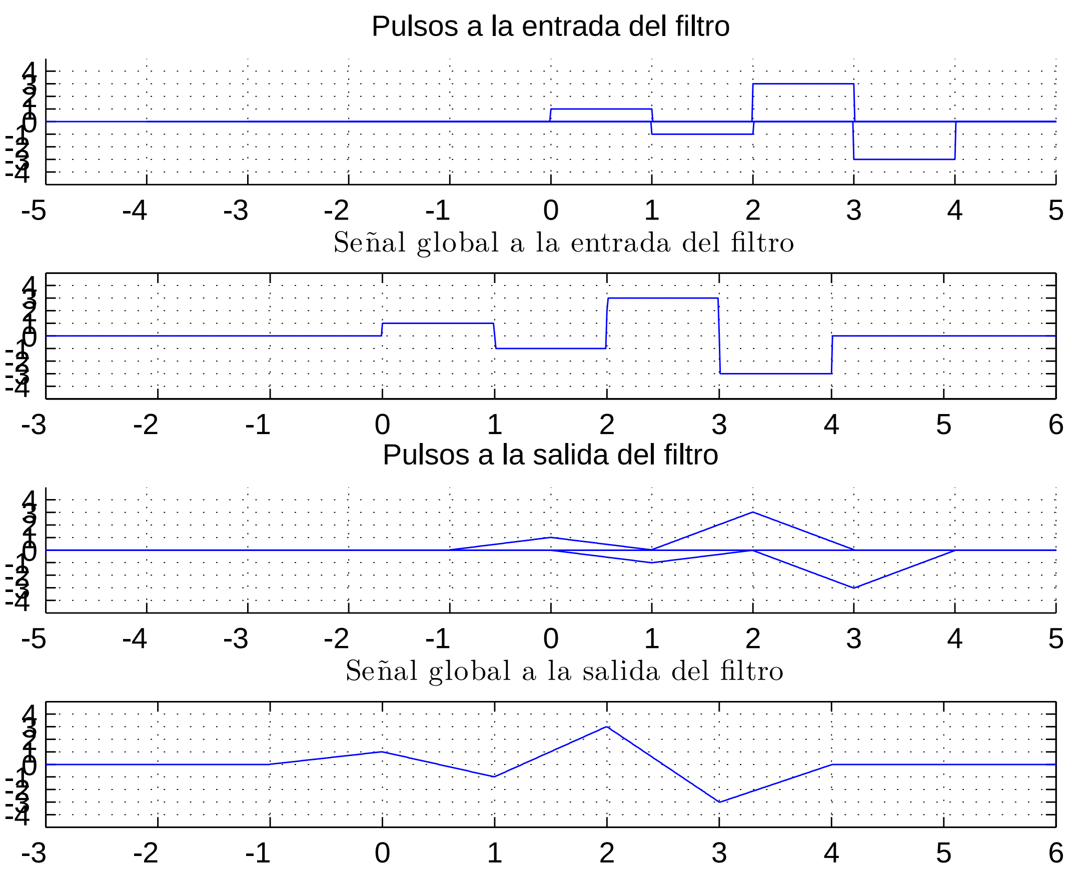


$\mathbf{n}_k$ independientes, con componentes independientes con la misma varianza ($N_0/2$ en el caso real, N_0 en el caso complejo)

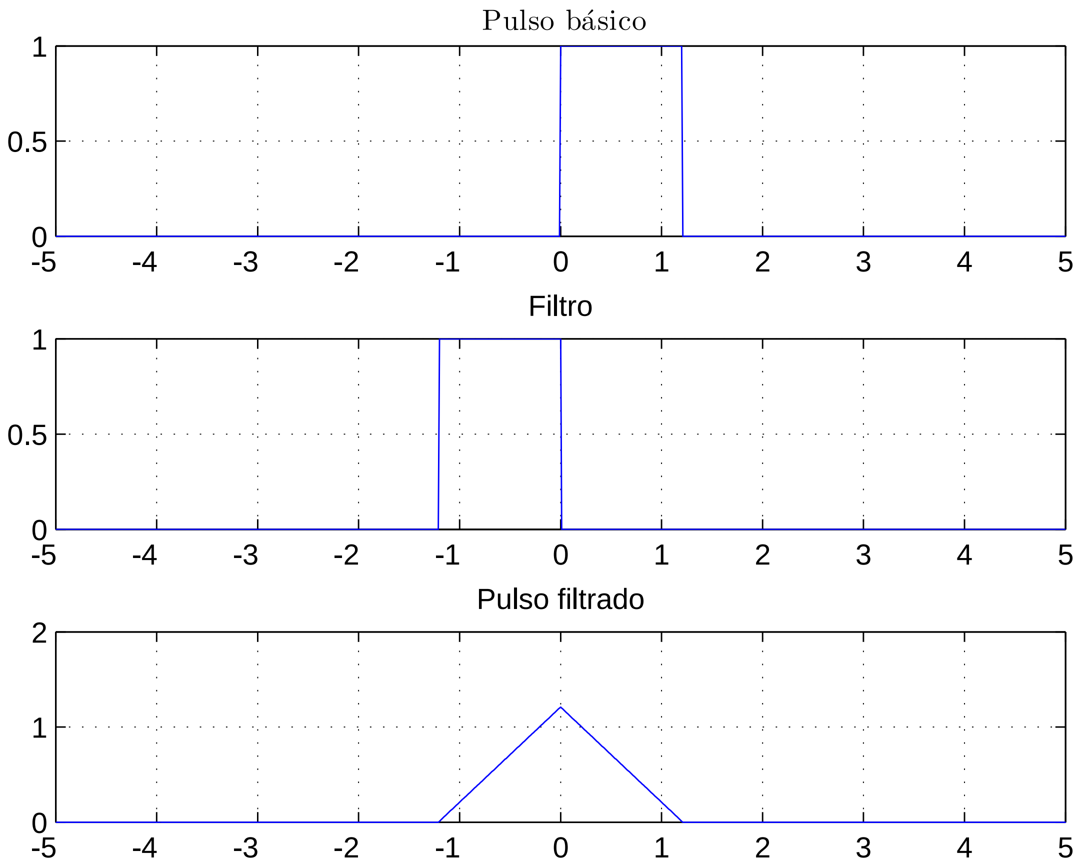
Fichero `ies.m`: Ejemplos de sistemas con y sin IES



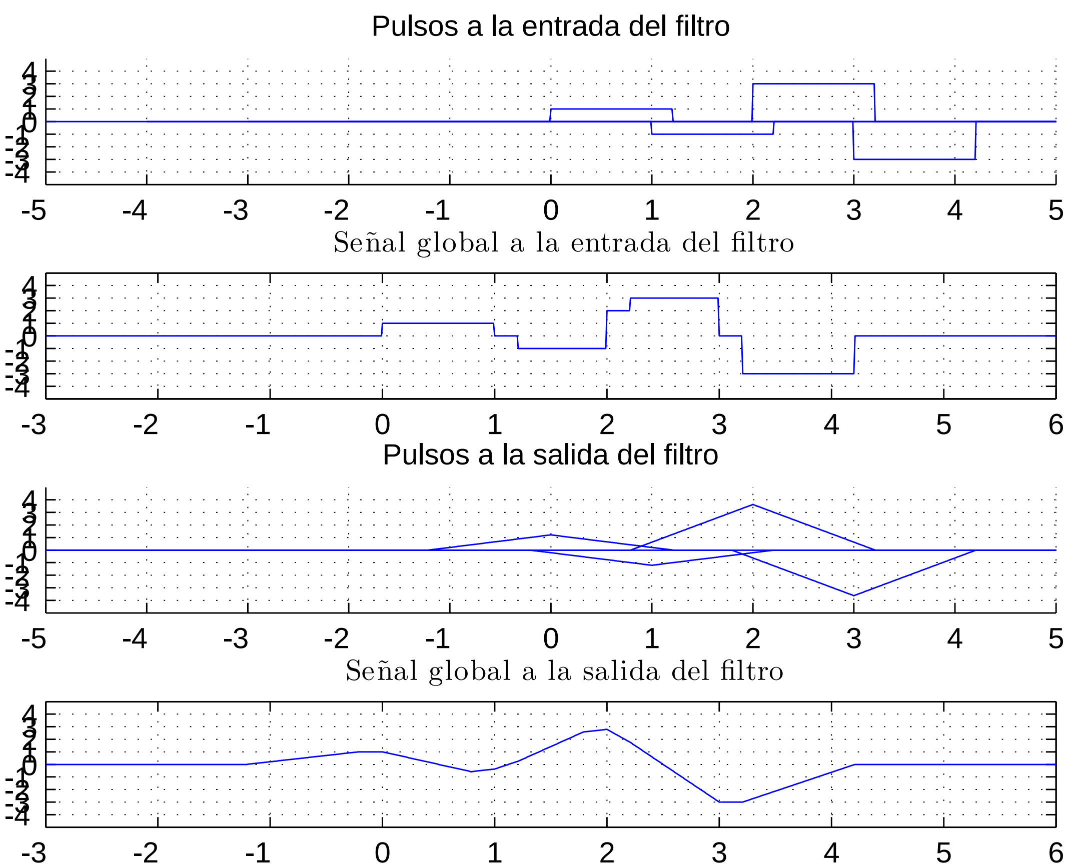
Complementos formativos



Complementos formativos



Complementos formativos



Problemas de la sección

Problemas 1.7, 1.8

Tema 2: Prestaciones

1. Probabilidad de error
2. Prestaciones y capacidad de canal

Probabilidad de error

1. Función Q
2. Cálculo exacto de P_E
3. Cálculo de cotas de P_E
4. Probabilidad de error de bit
5. Prestaciones de modulaciones básicas

Función Q

Utilizaremos la *función Q* para expresar probabilidades de VA gaussianas.

$$X \sim N(0,1)$$

$$Q(x) \equiv P[X \geq x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp -\frac{u^2}{2}\, \mathrm{d}u$$

$$(x \geq 0)$$

$$Y \sim N(0,\sigma)$$

$$P[Y \geq y] = P\left[\underbrace{\frac{Y}{\sigma}}_{N(0,1)} \geq \frac{y}{\sigma}\right] = Q\left(\frac{y}{\sigma}\right)$$

$$(y \geq 0)$$

Cálculo exacto de P_E

- title1
- Preámbulo

Tema 1: Receptores óptimos

Representación de señales deterministas

Modelado probabilístico del ruido

Receptores óptimos

Interferencia entre símbolos

Tema 2: Prestaciones

Probabilidad de error
- Probabilidad de error
- Función Q
- Cálculo exacto de P_E
- Cálculo de cotas de P_E
- Prestaciones de modulaciones
- Prestaciones: PAM
- Prestaciones: QAM
- Prestaciones: PSK
- Prestaciones: Modulaciones ortogonales
- Gráficas de P_E
- Probabilidad de error de bit
- Eficacias de modulaciones
- Complementos formativos

Fórmulas básicas:

$$P_{Ei} \equiv \text{Prob. de error cuando se transmite } s_i$$

$$P_E = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} P_{Ei}$$

$$P_{Ei} = 1 - P_{A_i}$$

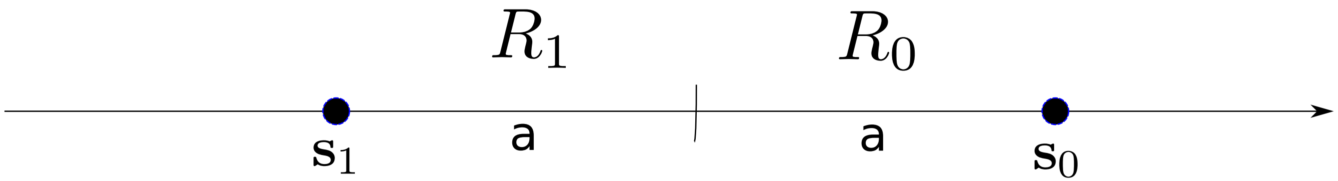
$$R_i \equiv \text{Región de decisión de } \mathbf{s}_i$$

$$P_{Ai} = P[\mathbf{s}_i + \mathbf{n} \in R_i]$$

Cuando las regiones de decisión son de tipo rectangular se pueden obtener expresiones exactas en términos de la función Q.

Cálculo exacto de P_E

Ejemplo: 2-PAM



$$
\begin{aligned}
P_{E1} &= P[\mathbf{s}_1 + \mathbf{n} \notin R_1] \\
&= P[n_0 \geq a]
\end{aligned}
$$

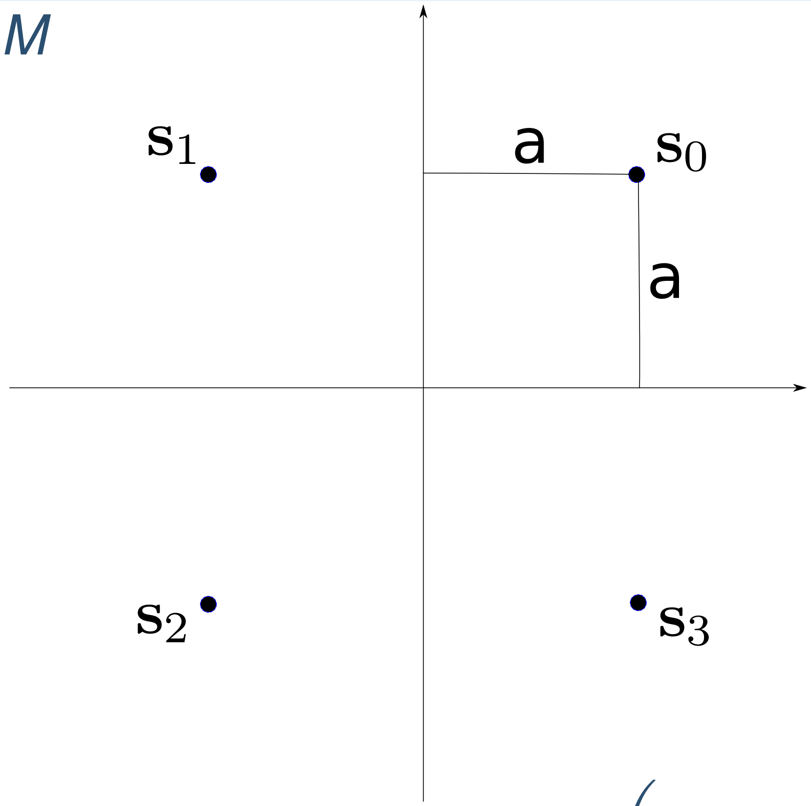
$$n_0 \sim N(0, \sigma_n) \Rightarrow P_{E1} = Q\left(\frac{a}{\sigma_n}\right)$$

$$P_{E0} = P_{E1}$$

$$P_E = P_{E0} = P_{E1}$$

Cálculo exacto de P_E

Ejemplo: 4-QAM

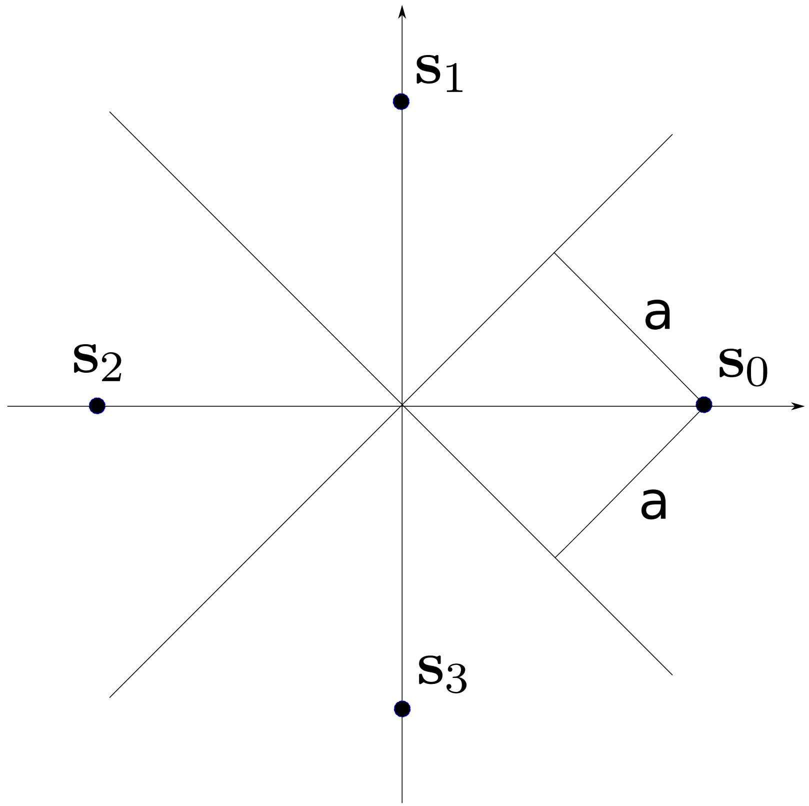


$$P_{A0} = P[n_0 \geq -a \;\; \& \;\; n_1 \geq -a] = \left(1 - Q\left(\frac{a}{\sigma_n}\right)\right)^2$$

$$P_{E0} = 1 - P_{A0}, \quad P_{Ei} = P_{E0}, \; i = 1, 2, 3$$

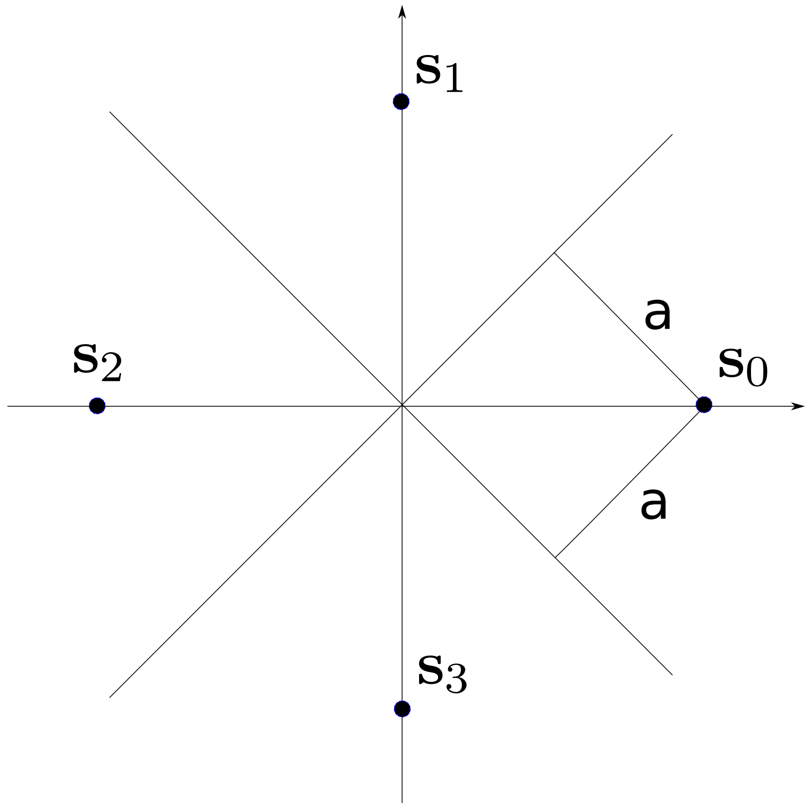
$$P_E = P_{E0} = 1 - \left(1 - Q\left(\frac{a}{\sigma_n}\right)\right)^2$$

Ejemplo: 4-PSK



Cálculo exacto de P_E

Ejemplo: 4-PSK

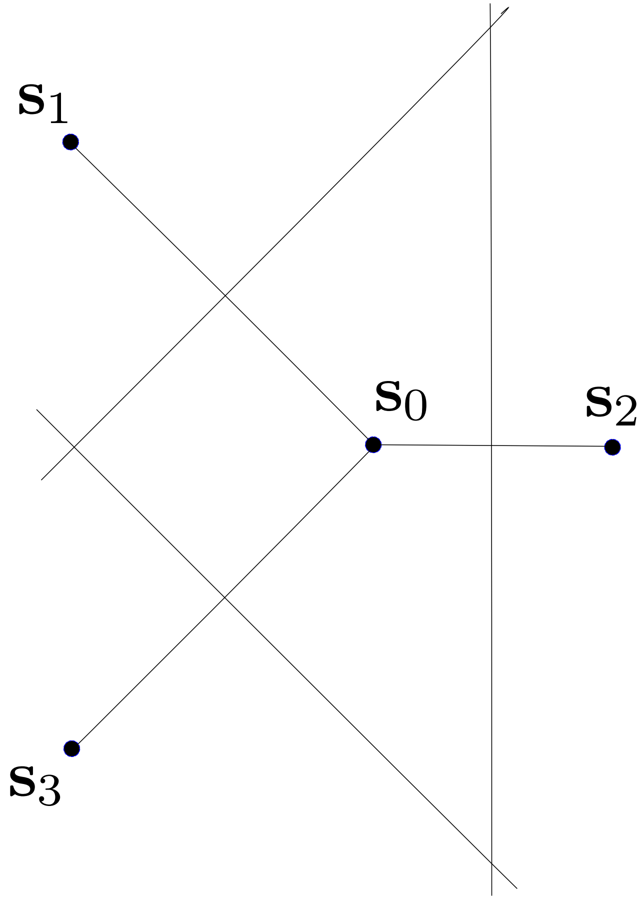


Cambiando la base ortonormal, se reduce al caso anterior:

$$P_E = 1 - \left(1 - Q\left(\frac{a}{\sigma_n}\right)\right)^2$$

Cálculo de cotas de P_E

¿Qué hacemos cuando tenemos regiones de decisión no rectangulares?



Cálculo de cotas de P_E

Notación:

$$d_{ij} \equiv d(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j)$$

$$d_{min,i} \equiv \min_{j \neq i} d_{ij}$$

$$\mathbf{s}_i^{(md)} \equiv \text{Señal más cercana a } \mathbf{s}_i$$

$$d(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_i^{(md)}) = d_{min,i}$$

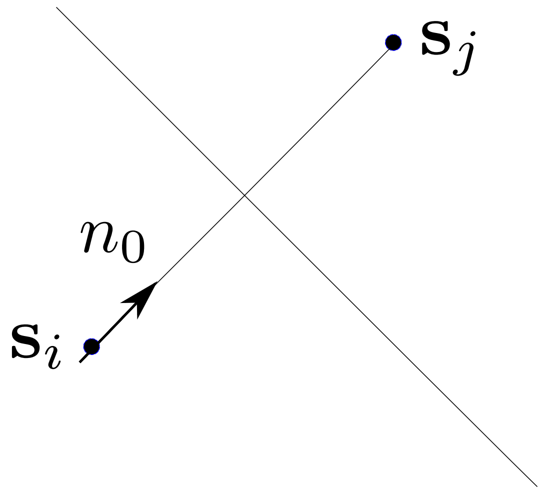
$$V_i \equiv \text{Índices de las señales } \textit{vecinas} \text{ de } \mathbf{s}_i$$

$$\text{(las que bastan para definir } R_i\text{)}$$

$$v_i \equiv \text{Número de señales vecinas de } \mathbf{s}_i.$$

Cálculo de cotas de P_E

Calculamos primero la probabilidad de que $\mathbf{r} = \mathbf{s}_i + \mathbf{n}$ esté más cerca de otra señal $\mathbf{s}_j$ que de $\mathbf{s}_i$.



Tomando una base ortonormal en la que $\phi_0(t)$ vaya en la dirección $s_j(t) - s_i(t)$ tenemos

$$P[d(\mathbf{r},\mathbf{s}_j) < d(\mathbf{r},\mathbf{s}_i)|\mathbf{s}_i] = P\left[n_0 > \frac{d_{ij}}{2}\right] = Q\left(\frac{d_{ij}/2}{\sigma_n}\right)$$

Cálculo de cotas de P_E

P_{Ei} es la probabilidad de que $\mathbf{r} = \mathbf{s}_i + \mathbf{n}$ esté más cerca de alguna otra señal que de s_i.
Por tanto es **mayor o igual** que la probabilidad de que esté más cerca de $s_i^{(md)}$ que de s_i:

$$
\begin{aligned}
P_{Ei} &\geq P[d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i^{(md)}) < d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i) | \mathbf{s}_i] \\
&= Q\left(\frac{d_{min,i}/2}{\sigma_n}\right)
\end{aligned}
$$

Cálculo de cotas de P_E

P_{Ei} también es la probabilidad de que esté más cerca de alguna señal **vecina** que de s_i. Por tanto es **menor o igual** que la suma de las probabilidades de que esté más cerca de alguna señal vecina que de s_i:

$$P_{Ei} \leq \sum_{j \in V_i} P[d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_j) < d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i) | \mathbf{s}_i]$$

$$= \sum_{j \in V_i} Q\left(\frac{d_{ij}/2}{\sigma_n}\right) \leq v_i Q\left(\frac{d_{min,i}/2}{\sigma_n}\right)$$

$$\leq (M-1) Q\left(\frac{d_{min,i}/2}{\sigma_n}\right)$$

Estamos utilizando la **cota de la unión *(union bound)*** de probabilidad:

$$P[A \cup B] \leq P[A] + P[B]$$

Cotas para la la P_E global de la modulación:
d_{min} : distancia mínima entre señales
v_{max} : número máximo de vecinos de una señal

$$Q\left(\frac{d_{min}/2}{\sigma_n}\right) \leq P_E \leq v_{max} Q\left(\frac{d_{min}/2}{\sigma_n}\right).$$

Cálculo de cotas de P_E

Error relativo máximo que se comete al calcular E_b/N_0 utilizando la aproximación, para distintos valores de P_E y v_{max}, *independientemente de la modulación*

	$v_{max} = 2$	$v_{max} = 8$
$P_E = 10^{-6}$	6.00 % (0.25 dB)	17.73 % (0.71 dB)
$P_E = 10^{-9}$	3.76 % (0.16 dB)	11.27 % (0.46 dB)

Prestaciones de modulaciones

Forma estándar de expresar P_E:

$$P_E = f\left(\frac{E_b}{N_0}\right)$$

Definiciones:

$M \equiv$ Número de señales de la modulación

$E_s \equiv$ Energía media por señal (pbe en el caso complejo)

$E_b \equiv$ Energía *física* media por bit

$\sigma_n^2 \equiv$ Varianza de las componentes de ruido (partes real e imaginaria en el caso complejo)

Prestaciones de modulaciones

Al calcular P_E la obtendremos en función de E_s/σ_n^2.
Veamos la conversión a E_b/N_0:
1. Sin modulación DBLC:

$$E_b = \frac{\text{energía por señal}}{\text{bits por señal}} = \frac{E_s}{\log_2 M}$$

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2}$$

$$\frac{E_s}{\sigma_n^2} = 2\log_2 M \frac{E_b}{N_0}$$

Prestaciones de modulaciones

2. Con modulación DBLC:

$$E_b = \frac{\text{energía por señal}}{\text{bits por señal}} = \frac{E_s/2}{\log_2 M}$$

(La señal paso bajo equivalente tiene energía doble de la físicamente recibida.)

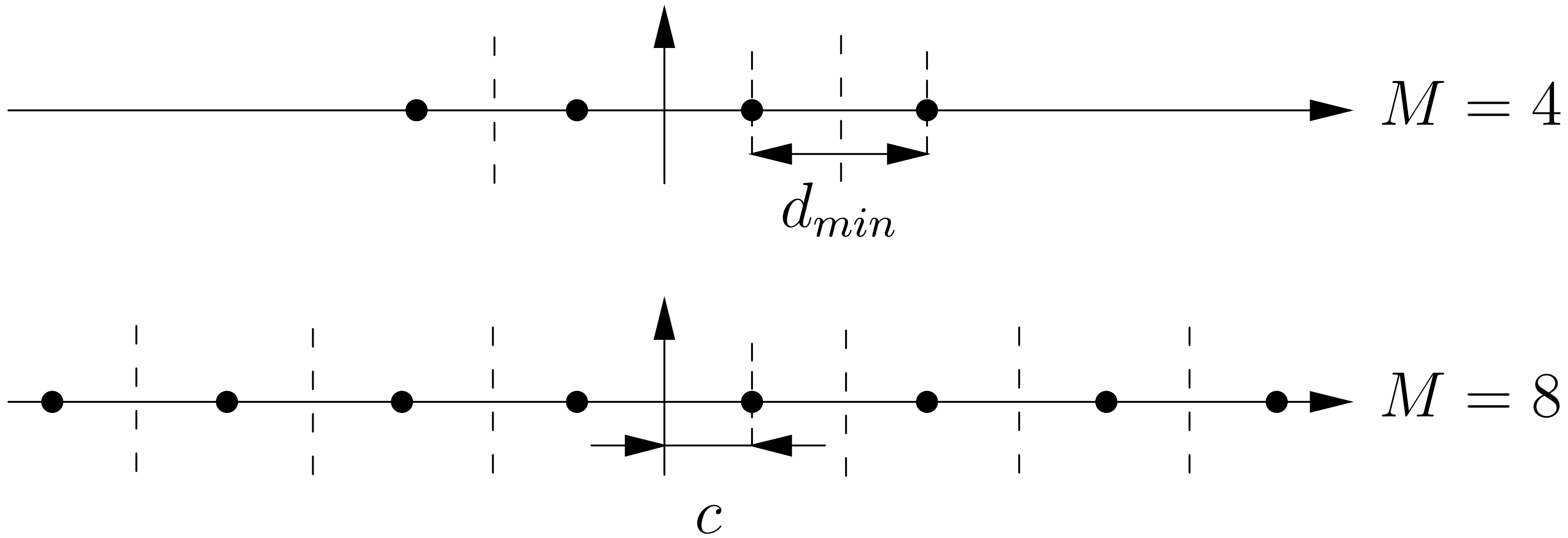
$$\sigma_n^2 = N_0$$

$$\frac{E_s}{\sigma_n^2} = 2\log_2 M \frac{E_b}{N_0}$$

La relación final es la misma en los dos casos.

Pulse Amplitude Modulation (PAM)

$$s_i(t) = A_i \phi(t), \quad A_i \in \{\pm c \cdot (2k-1), k = 1, ..., M/2\}$$



Prestaciones: PAM

Energía media por señal:
Utilizamos la relación

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

La energía por señal vale

$$\begin{aligned} E_s &= \frac{1}{M/2}\sum_{k=1}^{M/2}(2k-1)^2 c^2 \\ &= \frac{2}{M} c^2 \frac{(M/2)(4(M/2)^2-1)}{3} \\ &= \frac{c^2}{3}(M^2-1) \end{aligned}$$

Prestaciones: PAM

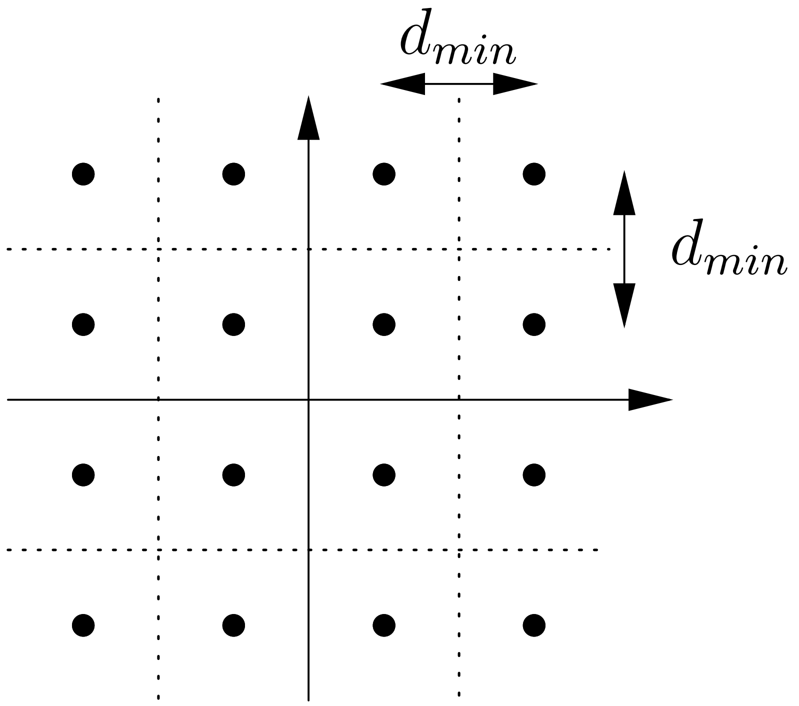
Probabilidad de error:

$$P_{E\text{ext}} = Q\left(\frac{c}{\sigma_n}\right), \quad P_{E\text{int}} = 2Q\left(\frac{c}{\sigma_n}\right)$$

$$\begin{aligned} P_E &= \frac{1}{M}\left[2P_{E,\text{ext}} + (M-2)P_{E,\text{int}}\right] \\ &= \frac{2M-2}{M} Q\left(\frac{c}{\sigma_n}\right) = \frac{2M-2}{M} Q\left(\sqrt{\frac{c^2}{\sigma_n^2}}\right) \\ &= \frac{2M-2}{M} Q\left(\sqrt{\frac{3E_s}{(M^2-1)\sigma_n^2}}\right) \\ &= \frac{2M-2}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6(E_b/N_0)\log_2 M}{M^2-1}}\right) \end{aligned}$$

Quadrature Amplitude Modulation (QAM)

$$s_i(t) = (A_{ic}+jA_{is})\phi(t), \quad A_{ic}, A_{is} \in \{\pm c\cdot(2k-1),\ k = 1, ..., \sqrt{M}/2\}$$



Prestaciones: QAM

Energía media por señal:

$$E_s = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} A_{ic}^2 + A_{is}^2$$

$$= \underbrace{\frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} A_{ic}^2}_{E_{sc}} + \underbrace{\frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} A_{is}^2}_{E_{ss}}$$

$$E_{sc} = E_{ss} = E_{s,\sqrt{M}-\text{PAM},c} = \frac{c^2}{3}(M-1)$$

$$E_s = E_{sc} + E_{ss} = 2\frac{c^2}{3}(M-1)$$

Prestaciones: QAM

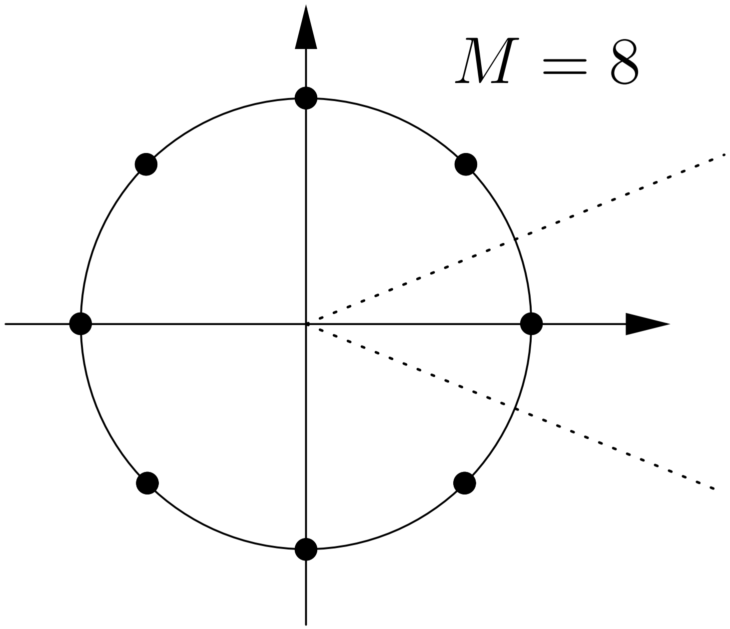
Número máximo de vecinos: 4
Distancia mínima: $d_{min} = 2c$
Probabilidad de error:
Se puede calcular exactamente pero utilizamos la aproximación:

$$Q\left(\frac{d_{min}/2}{\sigma_n}\right) \leq P_E \leq 4Q\left(\frac{d_{min}/2}{\sigma_n}\right)$$

$$\begin{aligned} Q\left(\frac{d_{min}/2}{\sigma_n}\right) &= Q\left(\sqrt{\frac{d_{min}^2}{4\sigma_n^2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{c^2}{\sigma_n^2}}\right) \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{3E_s}{2(M-1)\sigma_n^2}}\right) \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{3(E_b/N_0)\log_2 M}{M-1}}\right) \end{aligned}$$

Phase-Shift Keying (PSK)

$$s_i(t) = A \exp\left(\frac{j2\pi(i-1)}{M}\right) \cdot \phi(t)$$



Prestaciones: PSK

Energía media por señal:

$$E_s = A^2$$

Número de vecinos: 2
Distancia mínima:

$$d_{min} = 2A \operatorname{sen} \frac{\pi}{M}$$

Prestaciones: PSK

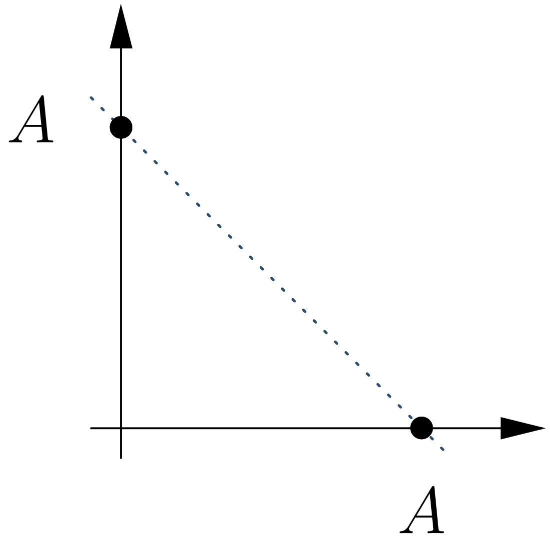
Probabilidad de error:

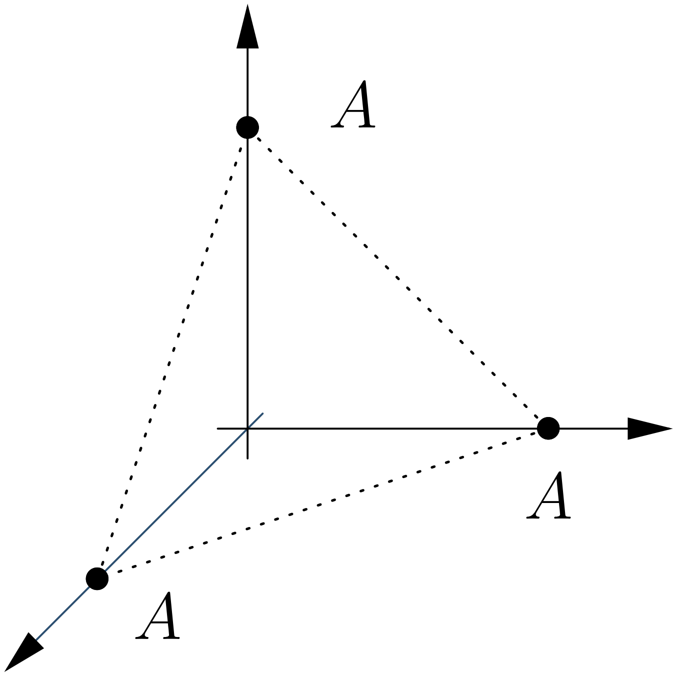
$$Q\left(\frac{d_{min}/2}{\sigma_n}\right) \leq P_E \leq 2Q\left(\frac{d_{min}/2}{\sigma_n}\right)$$

$$\begin{aligned} Q\left(\frac{d_{min}/2}{\sigma_n}\right) &= Q\left(\sqrt{\frac{d_{min}^2}{4\sigma_n^2}}\right) \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{A^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{M}}{\sigma_n^2}}\right) \\ &= Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}\log_2 M}\operatorname{sen}\frac{\pi}{M}\right) \end{aligned}$$

Modulaciones ortogonales

$$s_i(t) = A\phi_i(t)$$





Prestaciones: Modulaciones ortogonales

Energía media por señal:

$$E_s = A^2$$

Número de vecinos: $M - 1$

Distancia mínima

$$d_{min} = d_{ij} = \sqrt{2}A$$

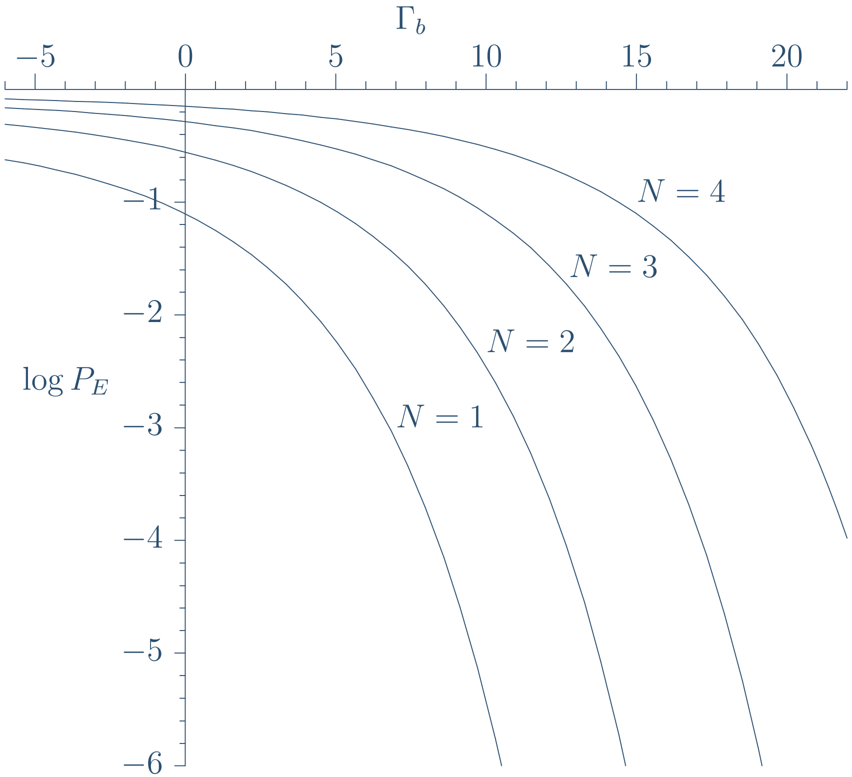
Prestaciones: Modulaciones ortogonales

Probabilidad de error:

$$Q\left(\frac{d_{min}/2}{\sigma_n}\right) \leq P_E \leq (M-1)Q\left(\frac{d_{min}/2}{\sigma_n}\right)$$

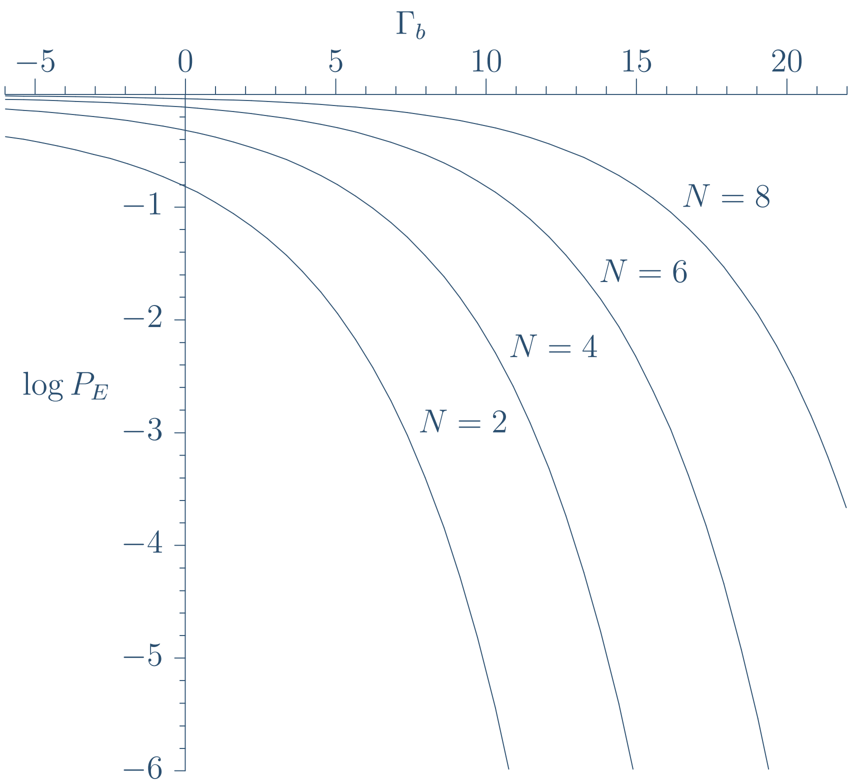
$$\begin{aligned} Q\left(\frac{d_{min}/2}{\sigma_n}\right) &= Q\left(\sqrt{\frac{d_{min}^2}{4\sigma_n^2}}\right) \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{2\sigma_n^2}}\right) \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}\log_2 M}\right) \end{aligned}$$

M-PAM ($M = 2^N$, $\Gamma_b = 10 \log_{10} \frac{E_b}{N_0}$)

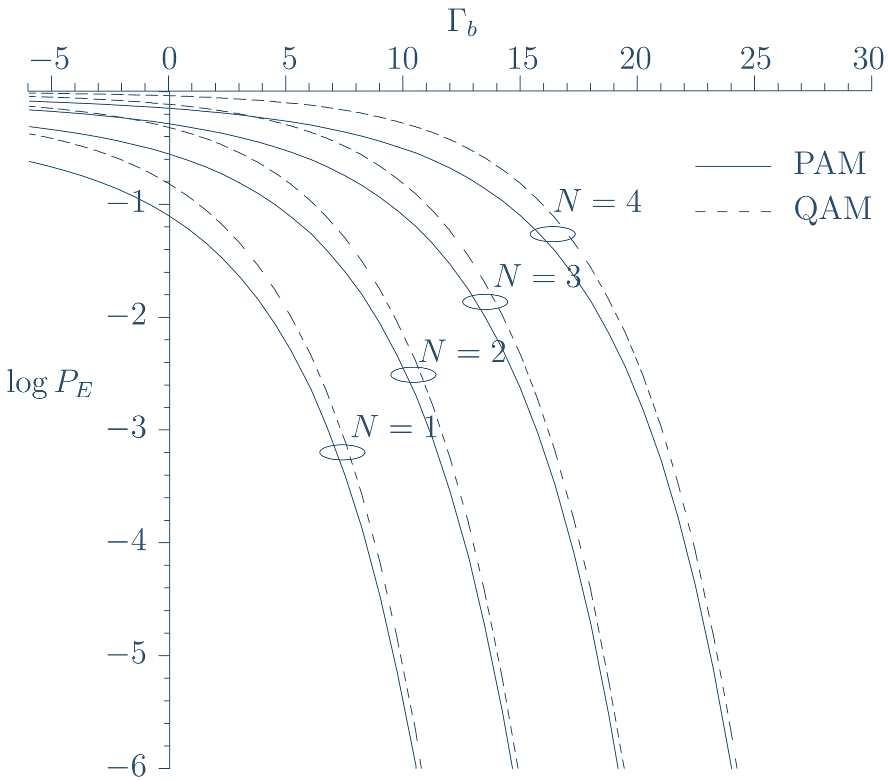


Gráficas de P_E

M-QAM ($M = 2^N$, $\Gamma_b = 10 \log_{10} \frac{E_b}{N_0}$)

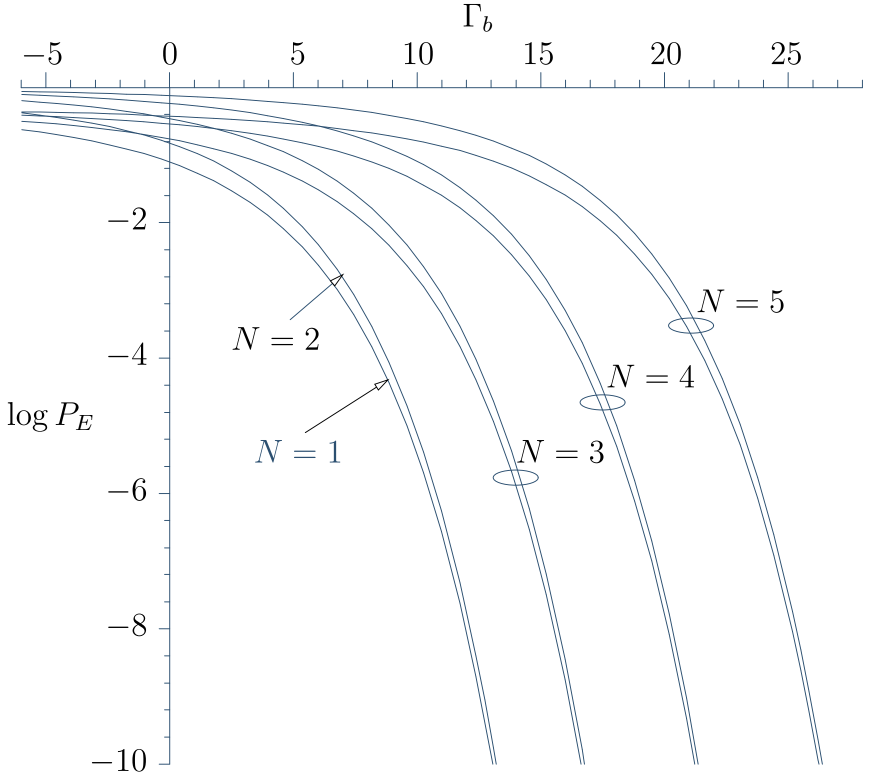


Comparación M^2-QAM vs M-PAM



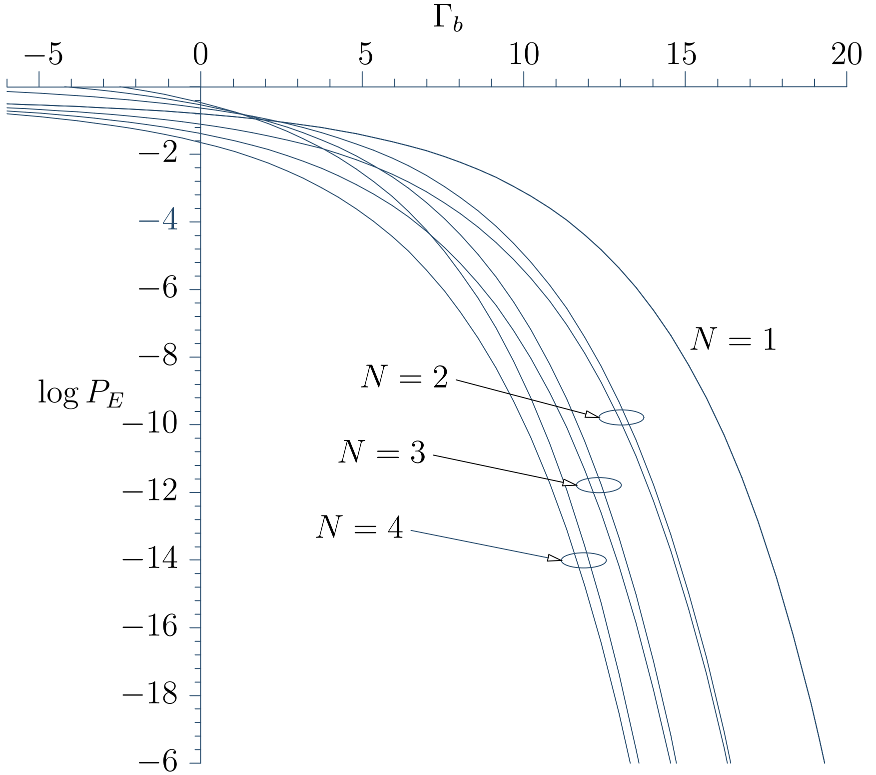
Gráficas de P_E

M-PSK ($M = 2^N$, $\Gamma_b = 10 \log_{10} \frac{E_b}{N_0}$)
(para $N > 2$, cotas superior e inferior)



Gráficas de P_E

Señales ortogonales ($M = 2^N$, $\Gamma_b = 10\log_{10}\frac{E_b}{N_0}$) (para $N > 1$, cotas superior e inferior)



Probabilidad de error de bit

La relación entre P_b y P_E depende de la modulación:

- PAM, PSK, QAM con *codificación Gray (entre señales vecinas sólo cambia un bit):*
  Un error en señal $\Rightarrow$ un error en bit (aprox.)

$$P_b \approx \frac{1}{\log_2 M} P_E$$

- Señales ortogonales:
  Un error en señal $\Rightarrow \frac{M/2}{M-1}$ bits erróneos en media

$$P_b \approx \frac{M/2}{M-1} P_E$$

Aproximación

$P_{b|i}$: probabilidad elegir un bit al azar y que ese bit resulte erróneo cuando se transmite la señal i

$P_{b|i\to j}$: Idem cuando se además se recibe la señal j,

$$P_{b|i\to j} = \frac{d_H(i,j)}{\log_2 M}$$

donde $d_H(i,j)$ *(distancia de Hamming)* es el número de bits en que difieren las palabras asociadas a las señales i y j.

$P_{Ei\to j}$: Probabilidad de detectar j cuando se transmite i,

$$P_{Ei\to j} \leq Q\left(\frac{d_{ij}/2}{\sigma_n}\right).$$

Tenemos

$$P_{b|i} = \sum_{j\neq i} P_{b|i\to j} P_{Ei\to j} \leq \sum_j \frac{d_H(i,j)}{\log_2 M} Q\left(\frac{d_{ij}/2}{\sigma_n}\right)$$

Eficacias de modulaciones

Parámetros de eficacia de una modulación: miden el rendimiento que se obtiene de los recursos utilizados.

- *Eficacia en potencia:* Inverso de la energía por bit normalizada E_b/N_0:

  $$\rho = \frac{1}{E_b/N_0}$$

  Depende de la probabilidad de error que consideremos.
- *Eficacia espectral:* Cociente

  $$\eta = \frac{R}{W}$$

  entre el número de bits por segundo R transmitidos y el ancho de banda utilizado W.

Eficacias de modulaciones

Fórmulas para la eficacia espectral

Notación:

R: Velocidad binaria (bits/s)

W: Ancho de banda *físicamente utilizado* (Hz)

T: Periodo de símbolo (s)

η: *Eficacia espectral*

$$\eta \equiv \frac{R}{W}$$

$$R = \frac{\log_2 M}{T}$$

$$W_{\text{min sin IES}} = \begin{cases} \frac{L}{2T} & \text{sin mod. DBLC} \\ \frac{L}{T} & \text{con mod. DBLC} \end{cases}$$

Eficacias de modulaciones

Eficacias espectrales $\eta = \frac{R}{W}$ de modulaciones básicas:

- **PAM:**

$$\eta_{max,PAM,M} = \frac{R(T,M)}{W_{min,PAM}(T)} = \frac{\log_2 M/T}{1/(2T)} = 2\log_2 M$$

- **QAM y PSK** (doble $W_{min}(T)$ por ser señales complejas):

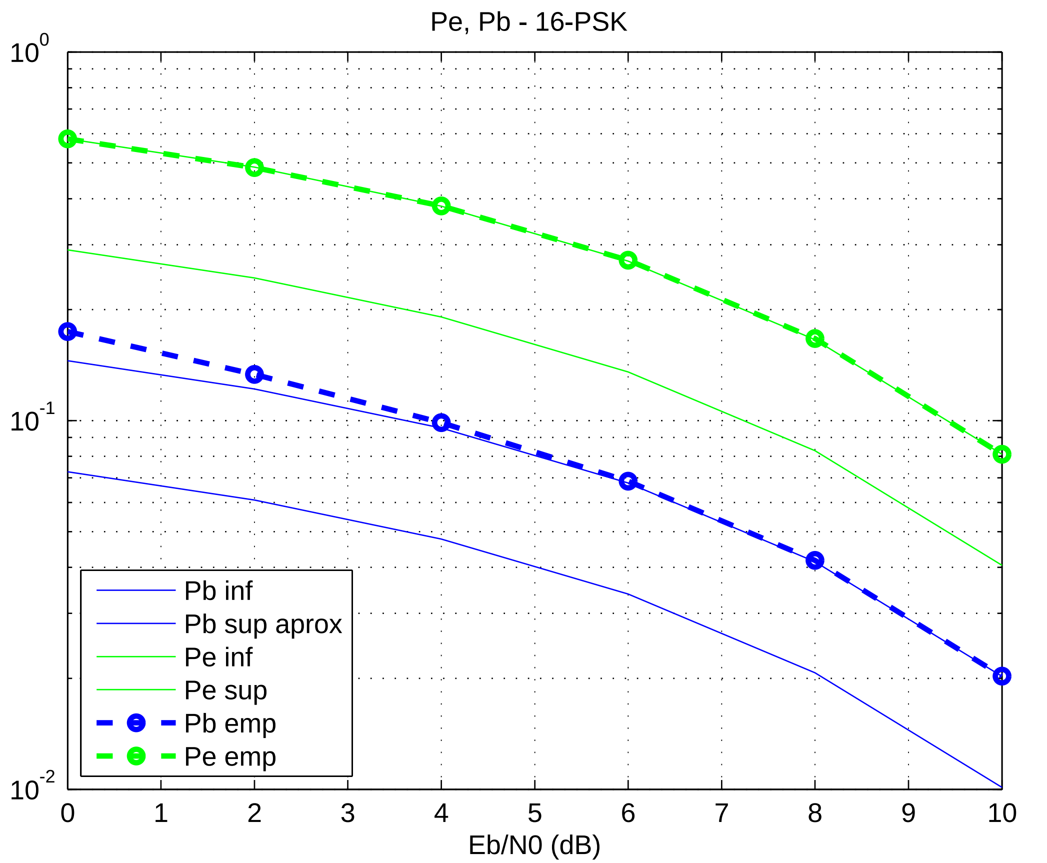
$$\eta_{max,QAM,M} = \frac{R(T,M)}{W_{min,QAM}(T)} = \frac{\log_2 M/T}{1/T} = \log_2 M$$

Obsérvese que M^2-QAM tiene la misma η que M-PAM.

- **Ortogonal:**

$$\eta_{max,FSK,M} = \frac{R(T,M)}{W_{min,FSK}(T)} = \frac{\log_2 M/T}{M/(2T)} = \frac{2\log_2 M}{M}$$

Gráfica de probabilidad de error obtenida con `test_graficas_pe.m`



Problemas de la sección

Problemas 2.1, 2.2

Capacidad del canal gaussiano

Teorema de Shannon de capacidad del canal gaussiano

En la transmisión por un canal ideal paso bajo o paso banda

- de ancho de banda W,
- con potencia s,
- con ruido blanco gaussiano de potencia $n = N_0 W$,

siempre que se verifique

$$R < C = W \log_2 \left(1 + \frac{s}{n}\right), \tag{1}$$

existen modulaciones que nos permiten transmitir con una P_E tan pequeña como deseemos.

Por el contrario, si $R > C$, la probabilidad de error es siempre mayor que $(R - C)/R$

Cap. de canal y eficacias de modulaciones

La fórmula de la capacidad del canal gaussiano limitado en banda nos permite evaluar si la *eficacia en potencia* y la *eficacia espectral* de una modulación están cerca o lejos de ser óptimas.
Recordamos que la *eficacia espectral* de una modulación es

$$\eta = \frac{R}{W}$$

y su *eficacia en potencia*

$$\rho = \frac{1}{E_b/N_0},$$

que depende de la P_E que consideremos.

Cap. de canal y eficacias de modulaciones

Para un sistema ideal con $R = C$ (sistemas que alcancen la capacidad de canal)

$$R = W \log_2 \left(1 + \frac{s}{n}\right)$$

$$s = E_b R, \quad n = N_0 W$$

$$\Rightarrow \frac{R}{W} = \log_2 \left(1 + \frac{E_b R}{N_0 W}\right) \Leftrightarrow \frac{E_b}{N_0} = \frac{2^\eta - 1}{\eta}$$

Para una modulación con $(E_b/N_0)_{\text{mod}}$, el valor

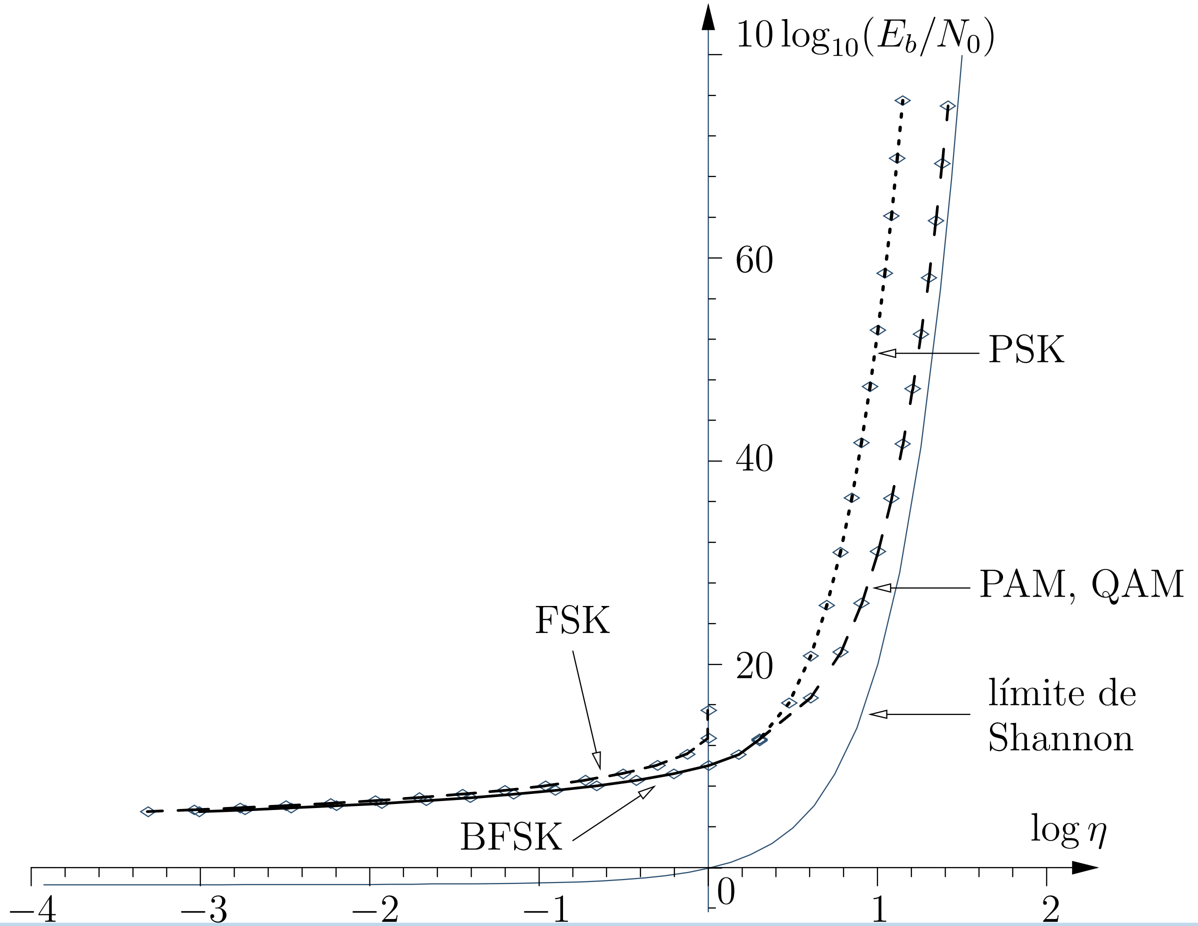
$$10 \log_{10} \left(\frac{(E_b/N_0)_{\text{mod}}}{(2^\eta - 1)/\eta} \right) \text{ (dB)}$$

se denomina **brecha de capacidad *(capacity gap)*** e indica cuánta potencia de más estamos necesitando por no utilizar una modulación óptima.

Cap. de canal y eficacias de modulaciones

Gráfica de eficacias de modulaciones

Brecha de capacidad de cada modulación (dB): distancia en vertical a la curva del límite de Shannon



Cap. de canal y eficacias de modulaciones

La curva presenta una asíntota horizontal:

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{\text{inf}} = \lim_{\eta \to 0} \frac{2^\eta - 1}{\eta} = \ln 2$$

$$10 \log_{10} \ln 2 = -1{,}6 \text{ dB}$$

Por tanto, si no tenemos restricciones de ancho de banda podemos transmitir con $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{\text{dB}} = -1{,}6$ dB con probabilidad de error arbitrariamente baja.

Aplicación fundamental: Comunicaciones espaciales

Cap. de canal y eficacias de modulaciones

En la figura también se observa

- Para PAM, QAM y PSK aumentar el número M de señales implica un mayor gasto de potencia pero al mismo tiempo una mejor eficacia espectral.
- Para FSK ocurre exactamente lo contrario.

Problema 2.3

Tema 3: Modulaciones con memoria

- Introducción a las modulaciones con memoria
- Modulaciones de fase continua

Introducción a las mod. con memoria

- Ejemplo introductorio
- Detección
- Prestaciones

Ejemplo introductorio

Partimos de la modulación binaria ordinaria

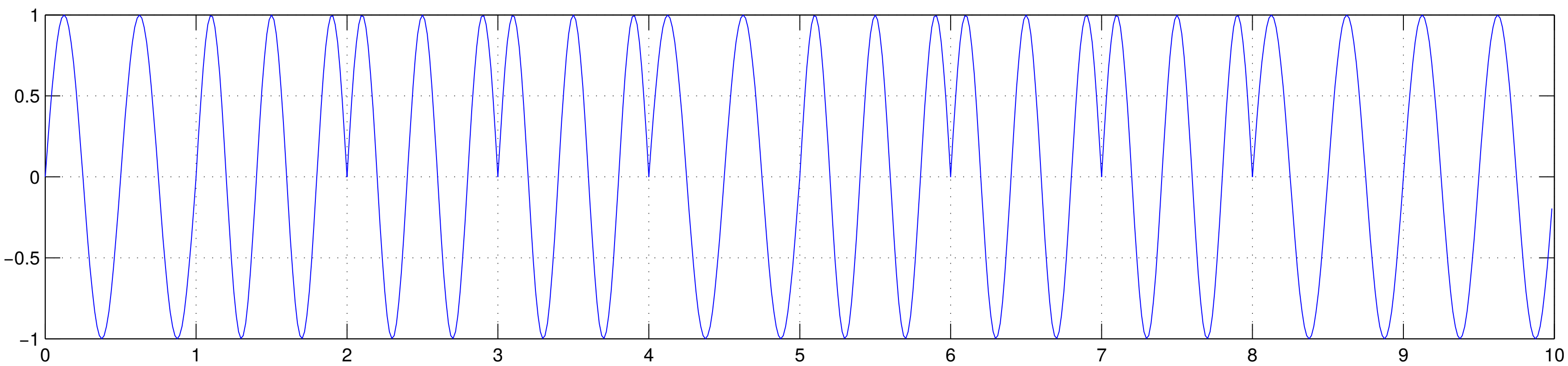
$$s_i(t) = A\sin(\omega_i t) w_{0,T}(t), \quad i = 0, 1,$$

$s_0(t)$ y $s_1(t)$

- Son de incremento de fase nulo si $\omega_i = 2k\pi/T$ $(f_1 - f_0 = k/T)$, $k \in \mathbf{Z}$.
- Son ortogonales si $\omega_1 \pm \omega_0 = k\pi/T$ $(f_1 \pm f_0 = k/(2T))$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ejemplo introductorio

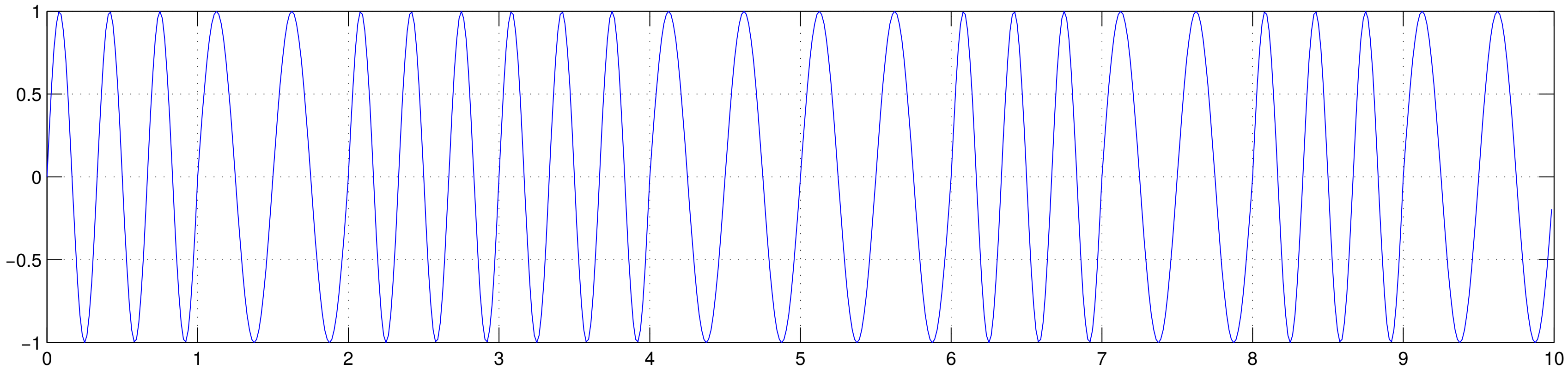
Si con $T = 1$ elegimos $f_0 = 2$, $f_1 = 2{,}5$,
tenemos $f_1 - f_0 = 0{,}5 = 1/(2T)$, $f_0 + f_1 = 4{,}5 = 9/(2T) \Rightarrow$ ortogonalidad



Pero tenemos altos bruscos en la fase $\Rightarrow$ Ancho de banda elevado

Ejemplo introductorio

Si con $T = 1$ elegimos $f_0 = 2$, $f_1 = 3$,
tenemos $f_1 - f_0 = 1 = 2/(2T)$, $f_0 + f_1 = 5 = 10/(2T) \Rightarrow$ ortogonalidad



Tenemos incremento de fase nulo pero
mayor separación de frecuencias $\Rightarrow$ Ancho de banda elevado

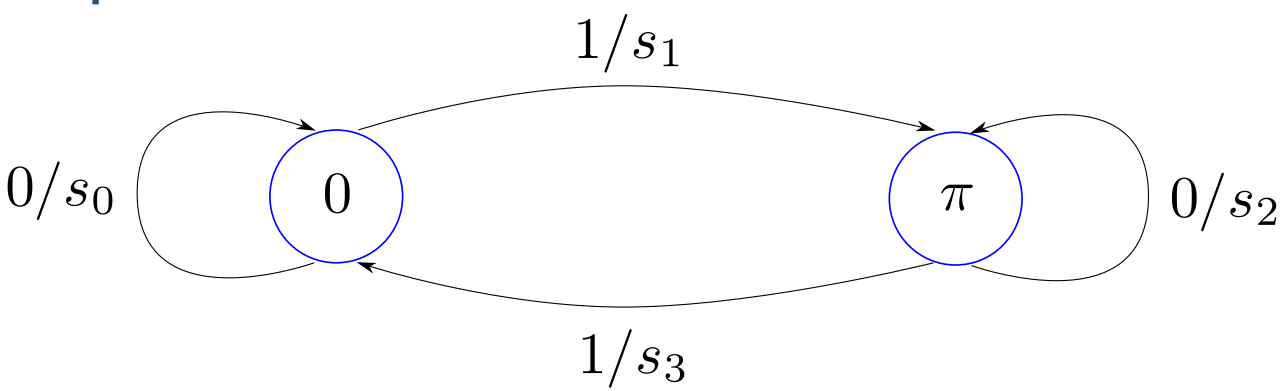
Ejemplo introductorio

Para tener **ortogonalidad con separación de frecuencias mínima**

- añadimos más señales:

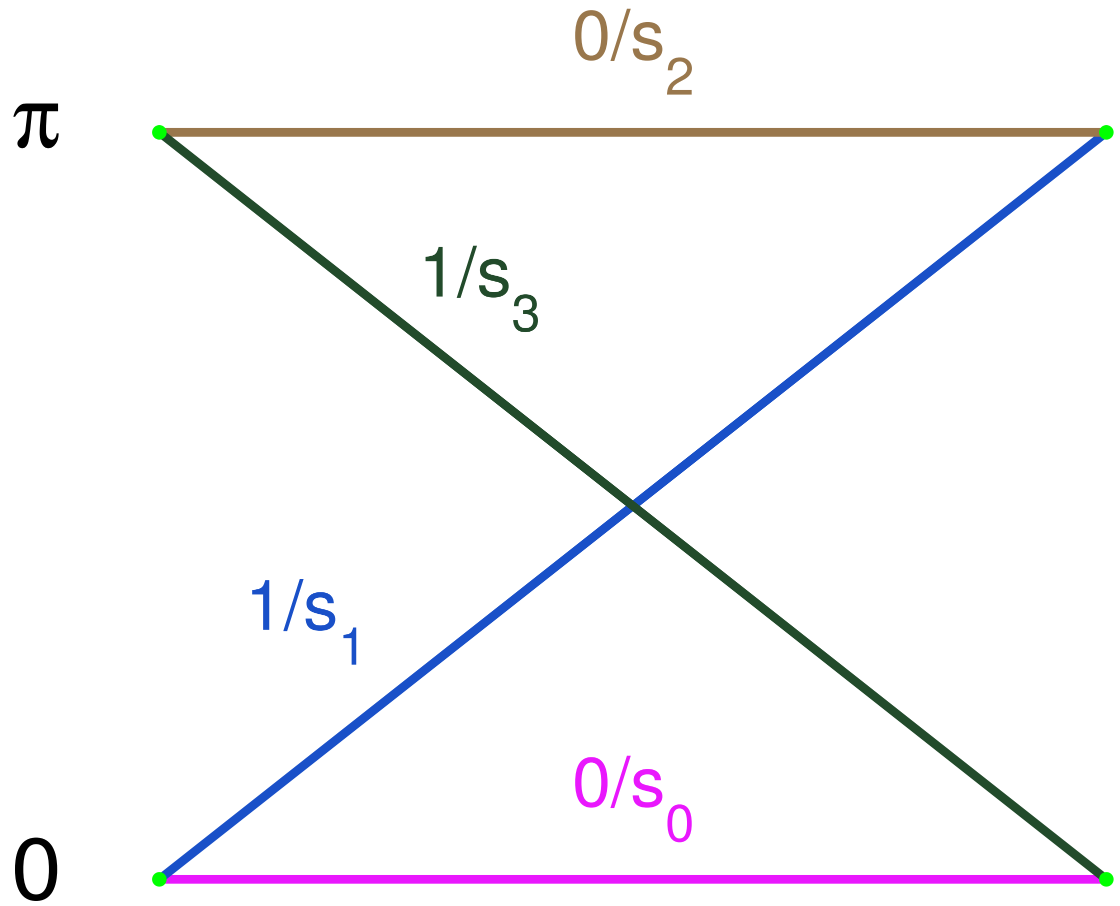
$$s_0(t) = A\sin(\omega_0 t)$$
$$s_1(t) = A\sin(\omega_1 t)$$
$$s_2(t) = A\sin(\omega_0 t + \pi) = -s_0(t)$$
$$s_3(t) = A\sin(\omega_1 t + \pi) = -s_1(t)$$

- e introducimos *memoria* en el codificador, que pasa a ser una **máquina de estados:**

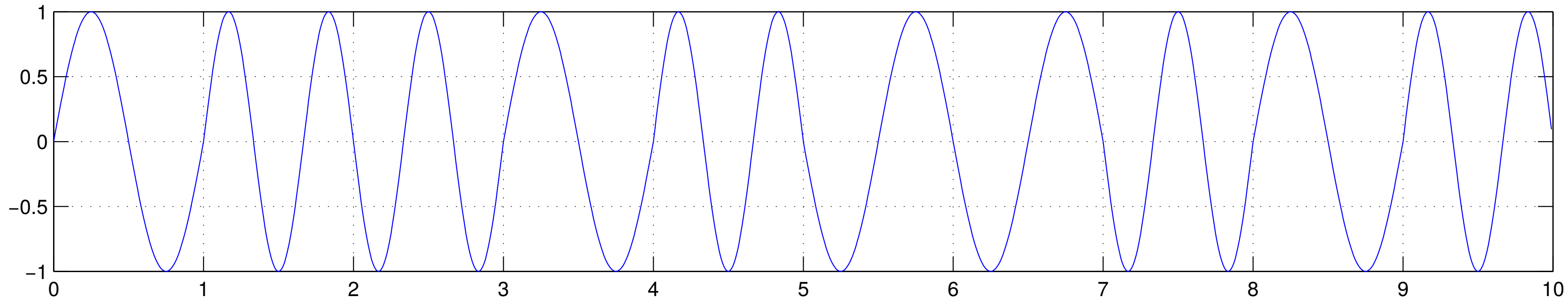


Ejemplo introductorio

Otra forma de representar la memoria del sistema (diagrama de estados en rejilla *(trellis)*)



Ejemplo de señal global



Definición

Una *modulación con memoria* es una máquina de estados finitos, caracterizada por

- Un conjunto finito de estados
- Un conjunto de símbolos de entrada
- Un alfabeto de señales de salida
- Una correspondencia que asocia a cada estado y símbolo de entrada un nuevo estado y una señal de salida.

Detección

Hipótesis: Suponemos que

- conocemos el estado inicial y el estado final de la máquina.
- las posibles señales transmitidas cuando la máquina se encuentra en un cierto estado son equiprobables.
- el conjunto de señales utilizadas satisface la condición de no IES.

Bajo estas hipótesis podemos utilizar el esquema habitual del receptor óptimo y aplicar *el criterio de mínima distancia*, pero *a toda la secuencia.*

Detección

Para la modulación de nuestro ejemplo:
Base ortonormal:

$$\phi_0(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(\omega_0 t) w_{0,T}(t),$$

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(\omega_1 t) w_{0,T}(t),$$

Coordenadas de las señales:

$$\mathbf{s}_0 = (\alpha, 0),$$

$$\mathbf{s}_1 = (0, \alpha),$$

$$\mathbf{s}_2 = (-\alpha, 0),$$

$$\mathbf{s}_3 = (0, -\alpha),$$

$$\alpha = A\sqrt{\frac{T}{2}}.$$

Detección

El receptor se basará en dos filtros con respuestas al impulso

$$h_i(t) = \phi_i(t_0 - t).$$

Si la señal global recibida es $r(t)$, las salidas de los filtros, muestreadas en $t = t_0 + kT$, serán

$$\begin{aligned} r_i^{(k)} &= r(t) * h_i(t)|_{t=t_0+kT} = \langle r(t), \phi_i(t-kT)\rangle \\ &= s_i^{(k)} + n_i^{(k)}, \end{aligned}$$

donde $s_i^{(k)}$ es la coordenada i de la señal transmitida en el intervalo k y $n_i^{(k)}$ es la contribución debida al ruido. Con estas muestras formamos los vectores

$$\mathbf{r}^{(k)} = (r_0^{(k)}, r_1^{(k)}).$$

Detección

Si, por ejemplo, sabemos que se han transmitido tres señales, comenzando y terminando en el estado cero, tendríamos que encontrar de entre las posibles secuencias de vectores $\mathbf{s}^{(k)}$ transmitidos, que son

$$\begin{aligned}&(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_0, \mathbf{s}_0),\\&(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_3),\\&(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_3, \mathbf{s}_0),\\&(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3),\end{aligned}$$

la más cercana a la secuencia recibida

$$(\mathbf{r}^{(0)}, \mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}).$$

Pero queremos evitar la búsqueda exhaustiva.

Detección

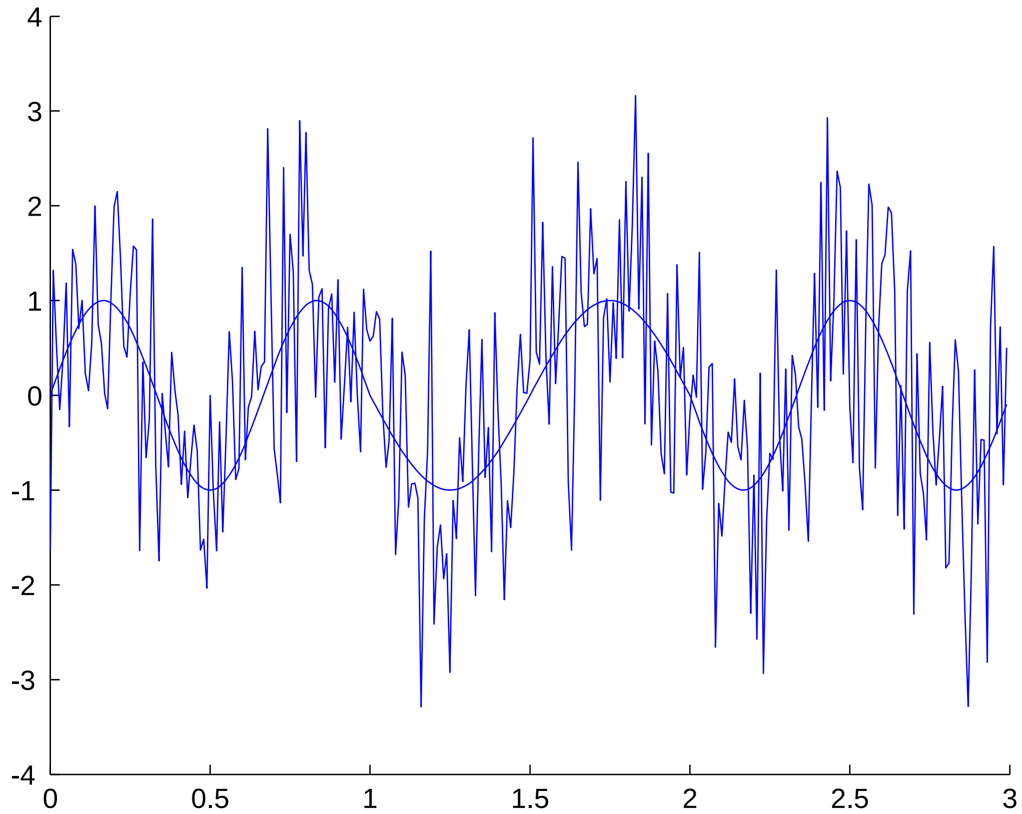
Cálculo de la señal global a distancia mínima:

- Representamos las posibles trayectorias del sistema en un **diagrama en rejilla *(trellis)*.**
- Asignamos a cada transición como **coste** C la distancia al cuadrado entre la señal de salida asociada a la transición, $s_i(t) \equiv \mathbf{s}_i$, y la señal recibida en el intervalo:

$$C = d^2(\mathbf{s}_i, \mathbf{r}^{(k)})$$

- Planteamos el problema como la obtención del **camino de menor coste** entre los estados inicial y final.

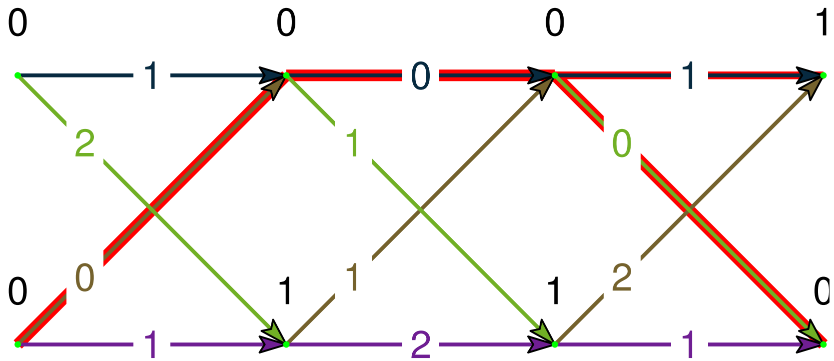
Ejemplo: señales transmitidas con ruido y sin él



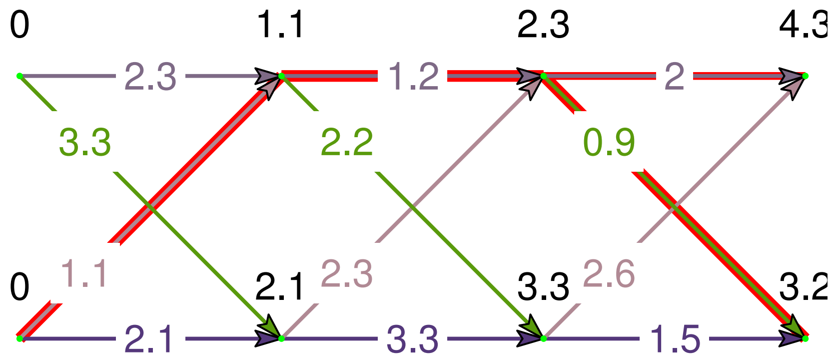
Detección

Ejemplo: distancias al cuadrado representadas sobre el diagrama de transiciones

Señal recibida sin ruido:



Señal recibida con ruido:

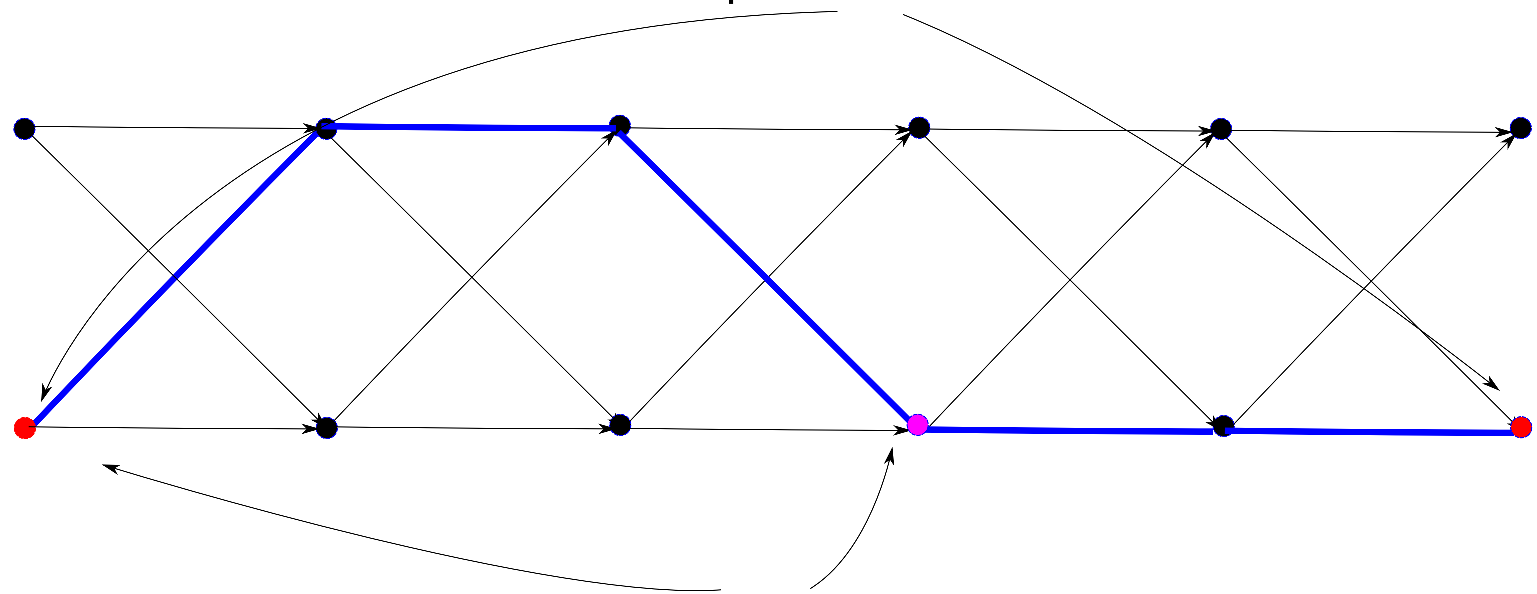


Detección

Algoritmo de Viterbi:

Idea básica:

Si este camino es óptimo entre sus extremos



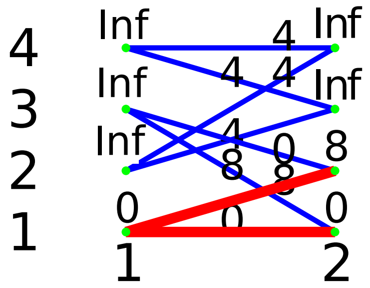
cualquier trozo es óptimo entre los suyos

Detección

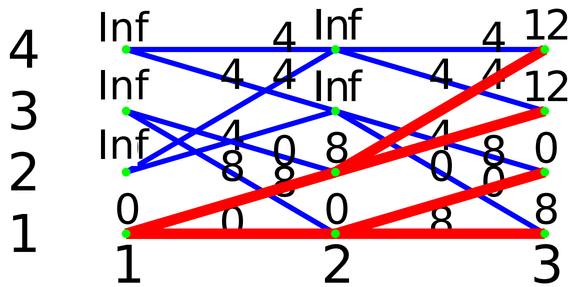
Algoritmo de Viterbi:

- Se calculan sucesivamente los caminos óptimos entre el estado inicial y *todos los nodos de cada etapa*, hasta la etapa final.
- Para ello:
  - Conociendo los caminos óptimos hasta cada nodo de la etapa k y los costes totales correspondientes ...
  - ... es inmediato calcular los caminos óptimos hasta cada nodo de la etapa $k+1$ y sus costes.

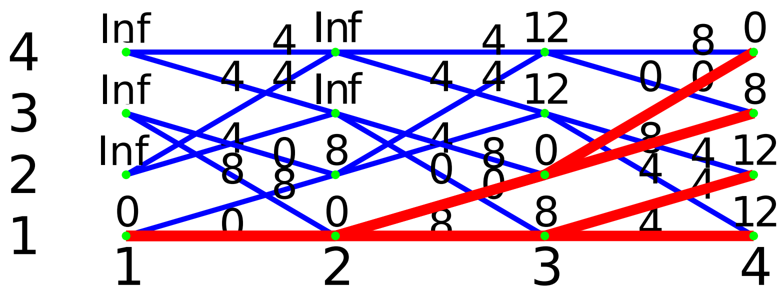
Detección



4
3
2
1
Inf
Inf
Inf
0
Inf
Inf
8
0
1
2

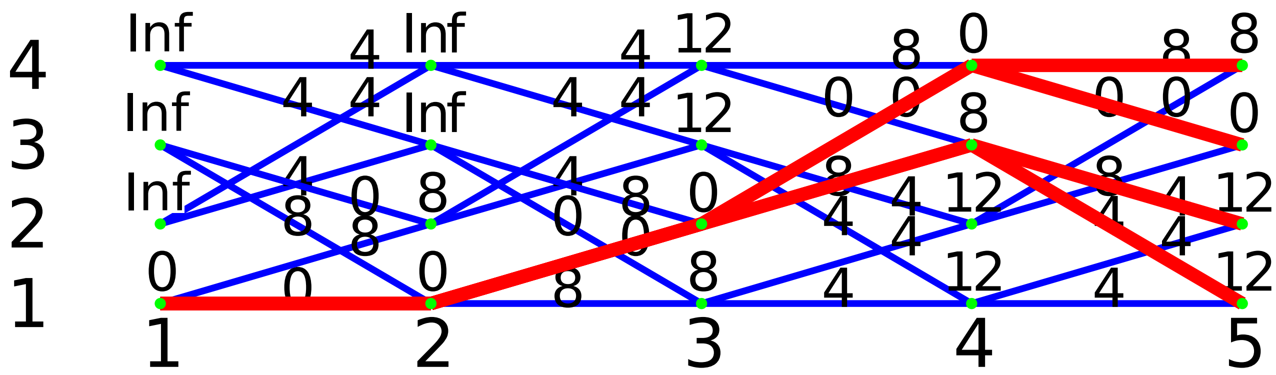


4
3
2
1
Inf
Inf
Inf
0
Inf
Inf
8
0
12
12
0
8
1
2
3

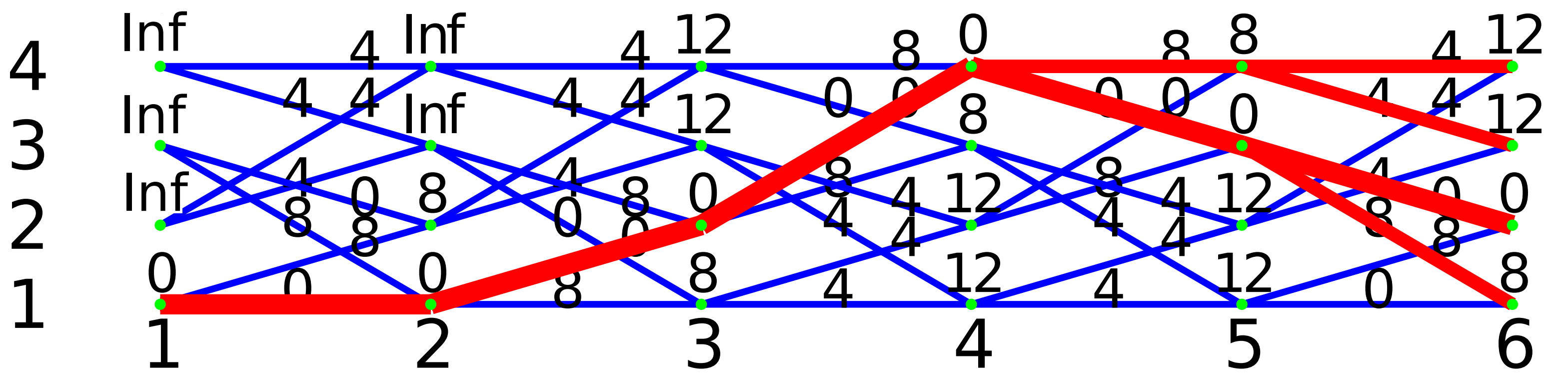


4
3
2
1
Inf
Inf
Inf
0
Inf
Inf
8
0
12
12
0
8
0
8
12
12
1
2
3
4

Detección



4
3
2
1
Inf Inf 12 0 8
Inf Inf 12 8 0
Inf 8 0 12 12
0 0 8 12 12
1 2 3 4 5



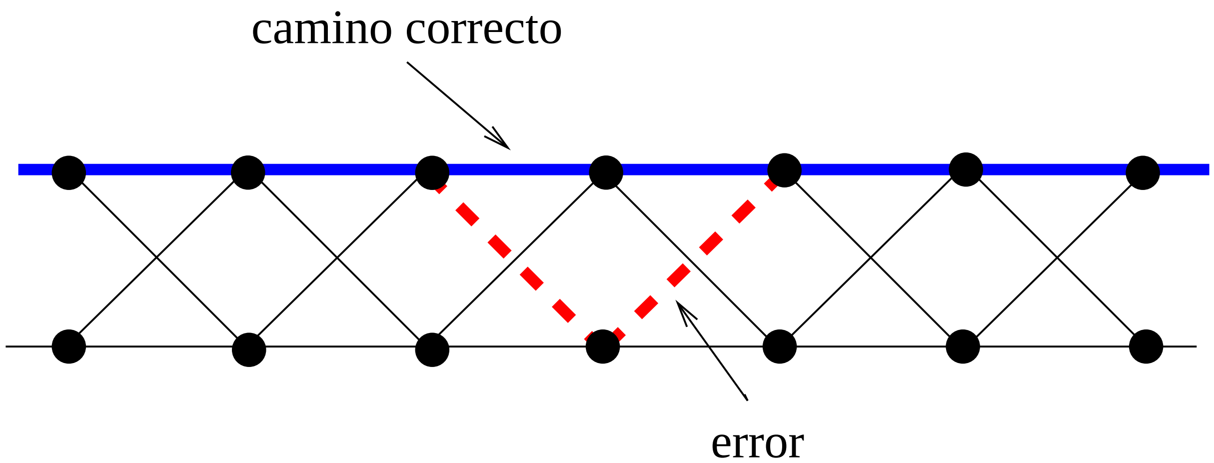
4
3
2
1
Inf Inf 12 0 8 12
Inf Inf 12 8 0 12
Inf 8 0 12 12 0
0 0 8 12 12 8
1 2 3 4 5 6

Prestaciones

- Aplicamos *a la señal global* la aproximación que vimos en el tema 2,

$$P_{b|i} = \sum_{j \neq i} P_{b|i \to j} P_{Ei \to j} \leq \sum_{j} \frac{d_H(i,j)}{\log_2 M} Q\left(\frac{d_{ij}/2}{\sigma_n}\right)$$

- A menudo se consideran sólo las señales *más cercanas* a la señal transmitida.
- En el diagrama en rejilla éstas corresponden a caminos que divergen del correcto y vuelven a él *(eventos de error)*.



Prestaciones

Aplicación a la modulación ejemplo:

- Consideramos una señal global de N símbolos.
- Las señales más cercanas diferirán en dos señales consecutivas, que serán ortogonales a las correctas: $\Rightarrow$ Tendrá $v \approx N$ señales a distancia $d^2 = 2 \cdot 2E_s$ (el evento puede empezar en cualquier etapa).
- Cada uno de estos errores en la señal global implica errores en $\beta = 2$ bits.

Prestaciones

Por tanto:

$$P_b \leq P_{b,sup} \approx \underbrace{v}_{N} \frac{\beta}{N} Q\left(\frac{d/2}{\sigma_n}\right)$$

$$= \beta\, Q\left(\frac{d/2}{\sigma_n}\right)$$

Una cota más fiable tendría que tener en cuenta todos los eventos de error, cada uno a distancia d_i y dando lugar a β_i errores de bit:

$$P_{b,sup} = \sum_i \beta_i Q\left(\frac{d_i/2}{\sigma_n}\right)$$

Prestaciones

En nuestro ejemplo, teniendo en cuenta el principal evento de error (mínima d)

$$P_{b,sup} = \beta\, Q\left(\frac{d/2}{\sigma_n}\right) = \beta\, Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{4\sigma_n^2}}\right)$$
$$= \beta\, Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{\sigma_n^2}}\right) = 2\, Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

Si comparamos con 2-FSK ortogonal (sin memoria)

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

vemos que para alta E_b/N_0 ganamos 3 dB.

Problemas de la sección

Problemas 3.1, 3.2

Modulaciones de fase continua

- Forma general
- Detección
- Prestaciones

Modulaciones de fase continua

(Continuous-Phase Modulations (CPM))

- Son modulaciones de envolvente constante
  $\Rightarrow$ Robustas frente a amplificadores no lineales
- Fase continua
  $\Rightarrow$ Señal continua, derivada continua o cercana a continua
  $\Rightarrow$ Buen comportamiento en ancho de banda
- Modulaciones con memoria con buenas propiedades en términos de P_E.
- Algoritmos eficientes en coste computacional
- Utilizadas en el estándar GSM de comunicaciones móviles

Modulaciones de fase continua

Forma general

$$x(t) = A\cos\left[\omega_c t + \phi(t)\right]$$

$$\tilde{x}(t) = \text{DBLC}(x(t, \mathbf{I}))$$

$$x(t) = Ae^{j\phi(t,\mathbf{I})}$$

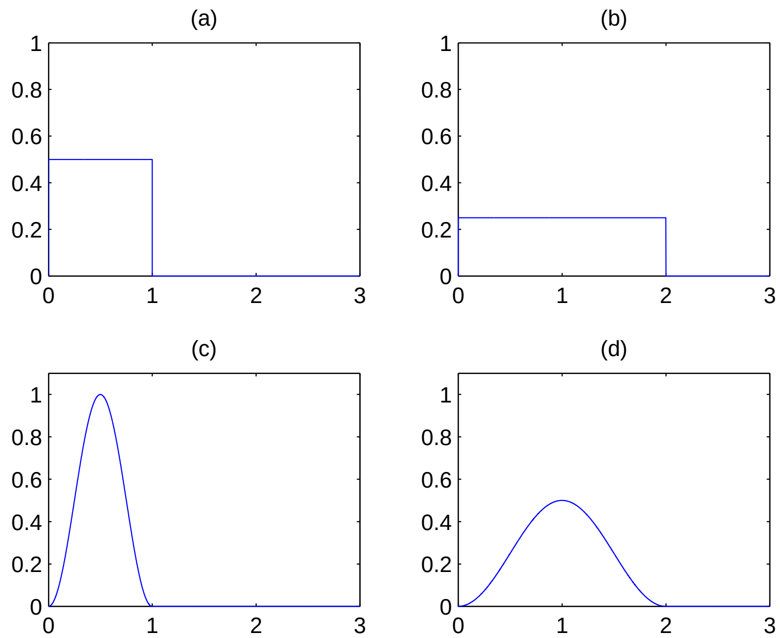
$$\phi(t, \mathbf{I}) = \theta_0 + 2h\pi \int_{-\infty}^{t} \left(\sum_n I[n] g(\tau - nT) \right) d\tau$$

Modulaciones de fase continua

Parámetros:

1. ω_c: pulsación de portadora,
2. θ_0: fase inicial,
3. T: periodo de símbolo,
4. $\mathbf{I} \equiv I[n]$: secuencia de símbolos de entrada, con valores en $\pm 1, \pm 3, \ldots, \pm(M-1)$.
5. h: *índice de modulación* ($h = m/p$ (fracción irreducible)),
6. $g(t)$: *pulso de fase,* no nula sólo en $[0, KT]$ y con integral igual a $1/2$.

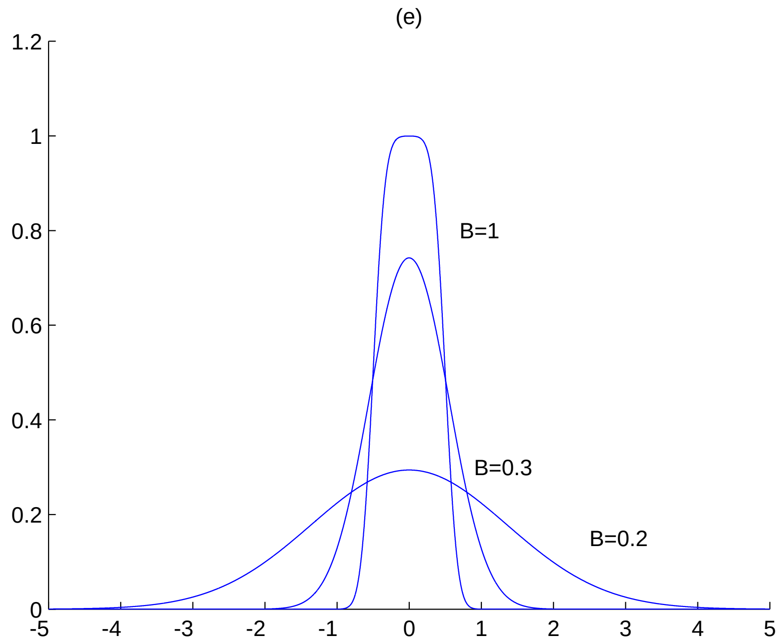
Pulsos de fase



Duración mayor que T: Modulaciones CPM de *respuesta parcial*
Duración menor que T: Modulaciones CPM de *respuesta total*

Pulsos de fase

Pulsos *Gaussian Minimum-Shift Keying (GMSK)*



Son los utilizados en GSM.

Sistemas de respuesta total

Vamos a describir la modulación como una **modulación con memoria.**
Consideramos $\phi(t, \mathbf{I})$ para $t \in [0, T)$

$$
\begin{aligned}
\phi(t, \mathbf{I}) &= 2h\pi \int_{-\infty}^{t} \left(\sum_{n} I[n] g(\tau - nT) \right) d\tau \\
&= 2h\pi \int_{-\infty}^{0} \left(\sum_{n<0} I[n] g(\tau - nT) \right) d\tau + 2h\pi I[0] \int_{0}^{t} g(\tau) d\tau \\
&= h\pi \sum_{n<0} I[n] + 2h\pi I[0] \int_{0}^{t} g(\tau) d\tau
\end{aligned}
$$

$$
\phi_0 \equiv \phi(0, \mathbf{I}) = h\pi \sum_{n<0} I[n]
$$

ϕ_0 representa la *memoria del sistema.* Veremos que sus valores son un conjunto finito.

Sistemas de respuesta total

Señales del alfabeto:

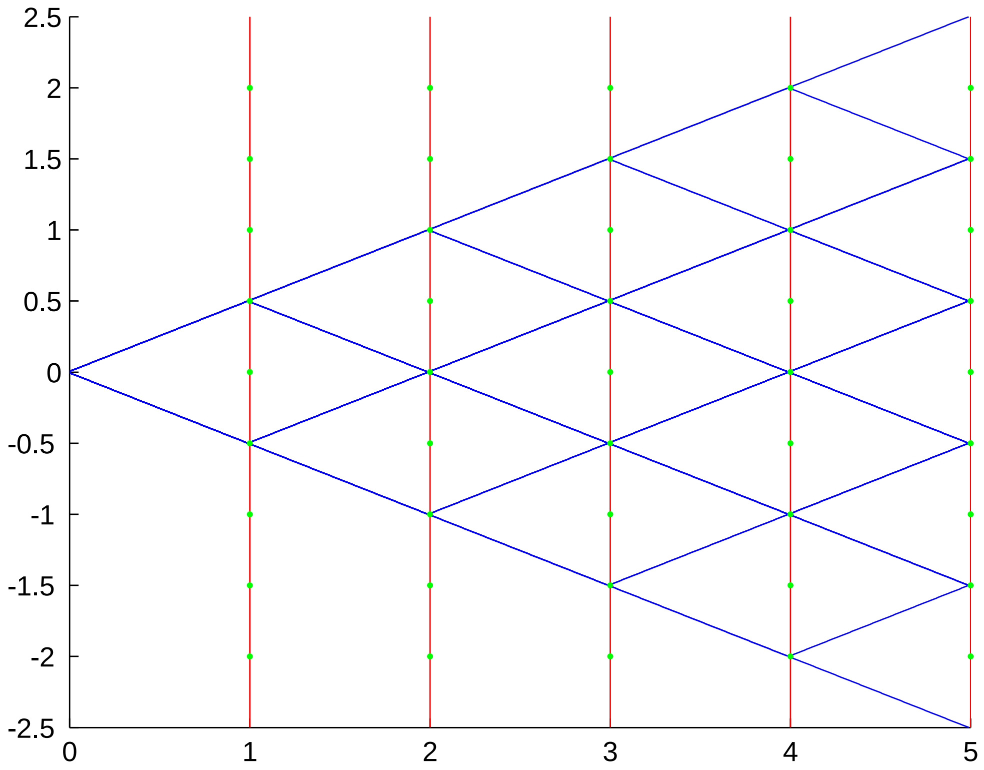
$$s(\phi_0, I; t) = A \exp\left[j\phi_0 + j\frac{2\pi m}{p} I \int_0^t g(\tau) dt\right]$$

Si $g(t)$ es un pulso cuadrado:

$$s(\phi_0, I; t) = A \exp\left[j\phi_0 + jI\frac{2\pi m}{p}\frac{1}{2T}t\right]$$

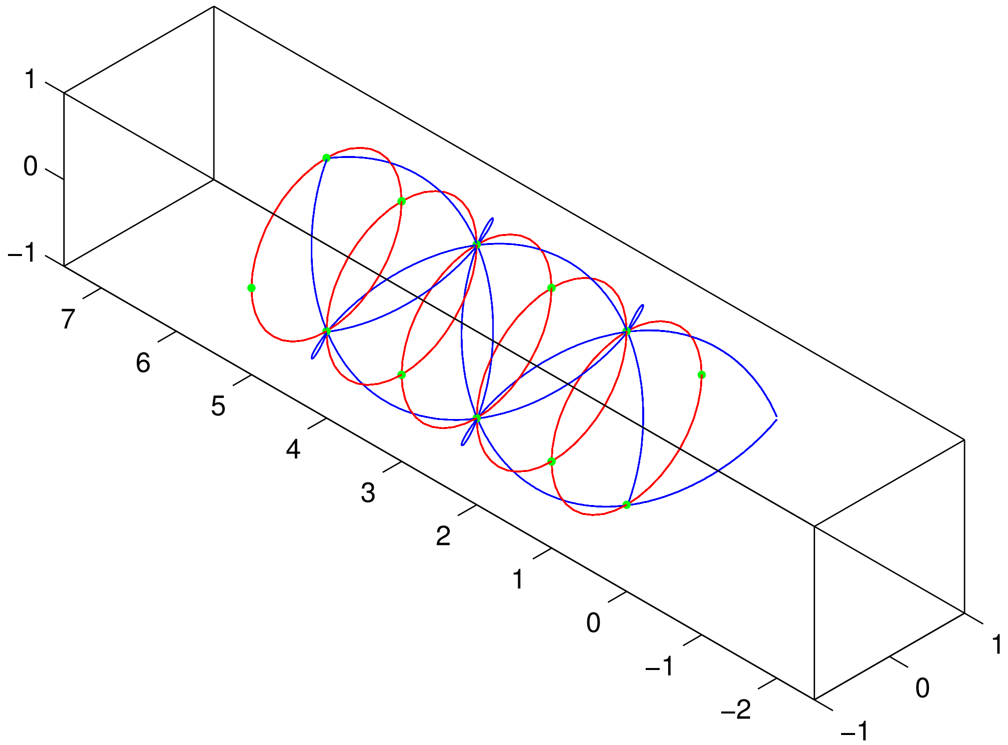
Árbol de fases

$K = 1$, $h = 1/2$, $M = 2$, $g(t)$ pulso cuadrado
Valores de ϕ_0: $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$
Representado en el plano



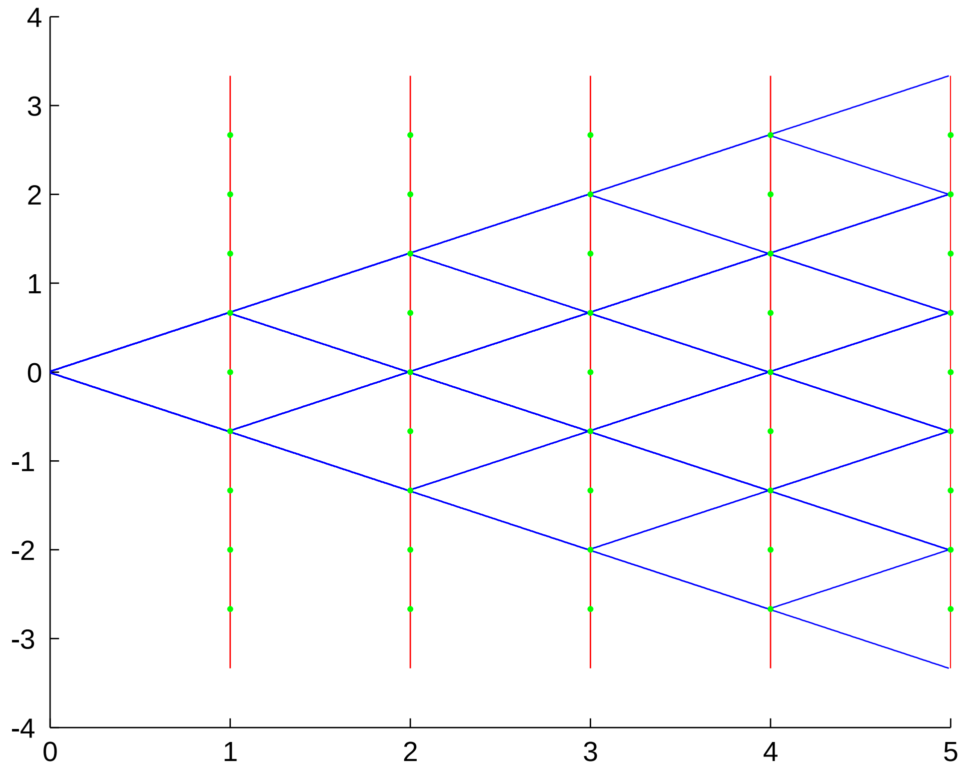
Árbol de fases

$K = 1$, $h = 1/2$, $M = 2$, $g(t)$ pulso cuadrado
Valores de ϕ_0: $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$
Representado sobre un cilindro



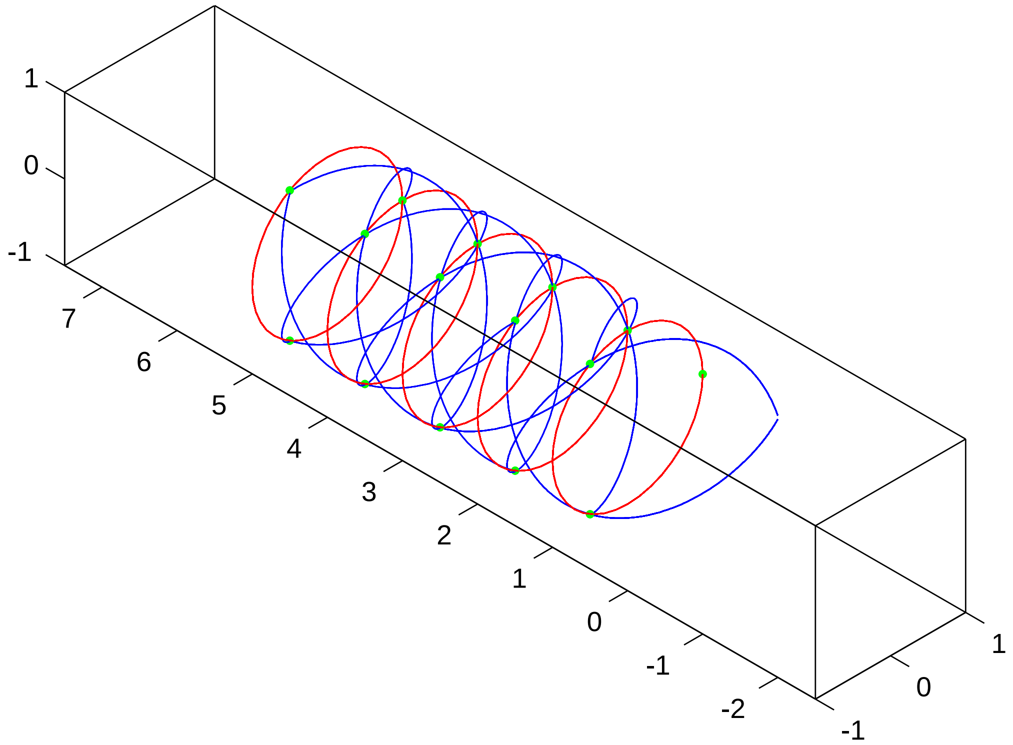
Árbol de fases

$K = 1$, $h = 2/3$, $M = 2$, $g(t)$ pulso cuadrado
Valores de ϕ_0: $0, 2\pi/3, 4\pi/3$



Árbol de fases

$K = 1$, $h = 2/3$, $M = 2$, $g(t)$ pulso cuadrado
Valores de ϕ_0: $0, 2\pi/3, 4\pi/3$



Valores de la fase inicial

En general se puede demostrar que la fase inicial

$$\phi_0 = h\pi \sum_{n<k} I[n]$$

toma los valores

$$\text{para } m \text{ par,} \quad \left\{0, \frac{\pi m}{p}, \frac{2\pi m}{p}, \ldots, \frac{(p-1)\pi m}{p}\right\}, \quad (p \text{ valores})$$

$$\text{para } m \text{ impar,} \quad \left\{0, \frac{\pi m}{p}, \frac{2\pi m}{p}, \ldots, \frac{(2p-1)\pi m}{p}\right\} \quad (2p \text{ valores}).$$

Por ejemplo:

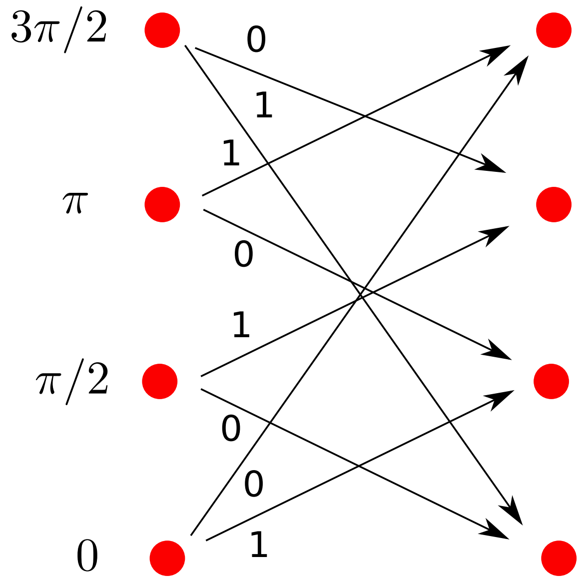
$$h = \frac{m}{p} = \frac{2}{3} \Rightarrow \phi_0 = 0,\ 2\pi/3,\ 4\pi/3$$

$$h = \frac{m}{p} = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi_0 = 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$$

Diagrama en rejilla

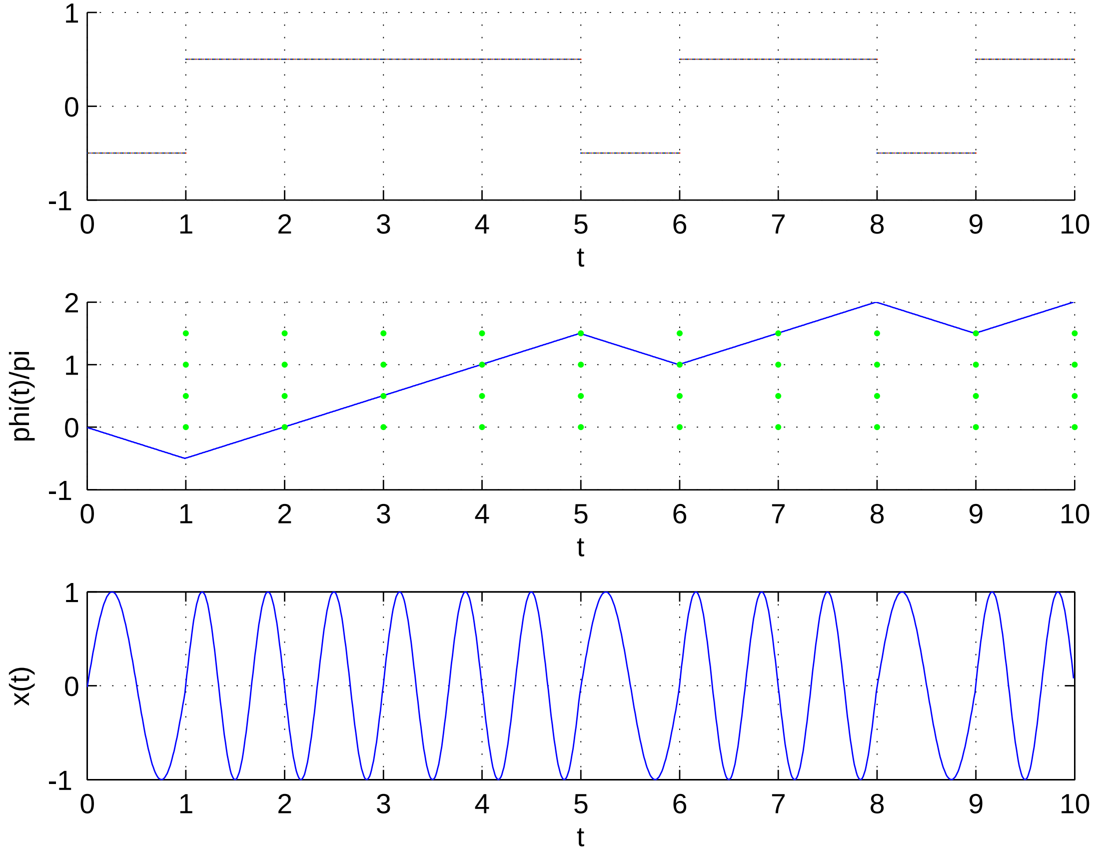
$$K = 1,\, h = 1/2,\, M = 2$$

$$0 \mapsto I = -1, \;\; 1 \mapsto I = +1$$



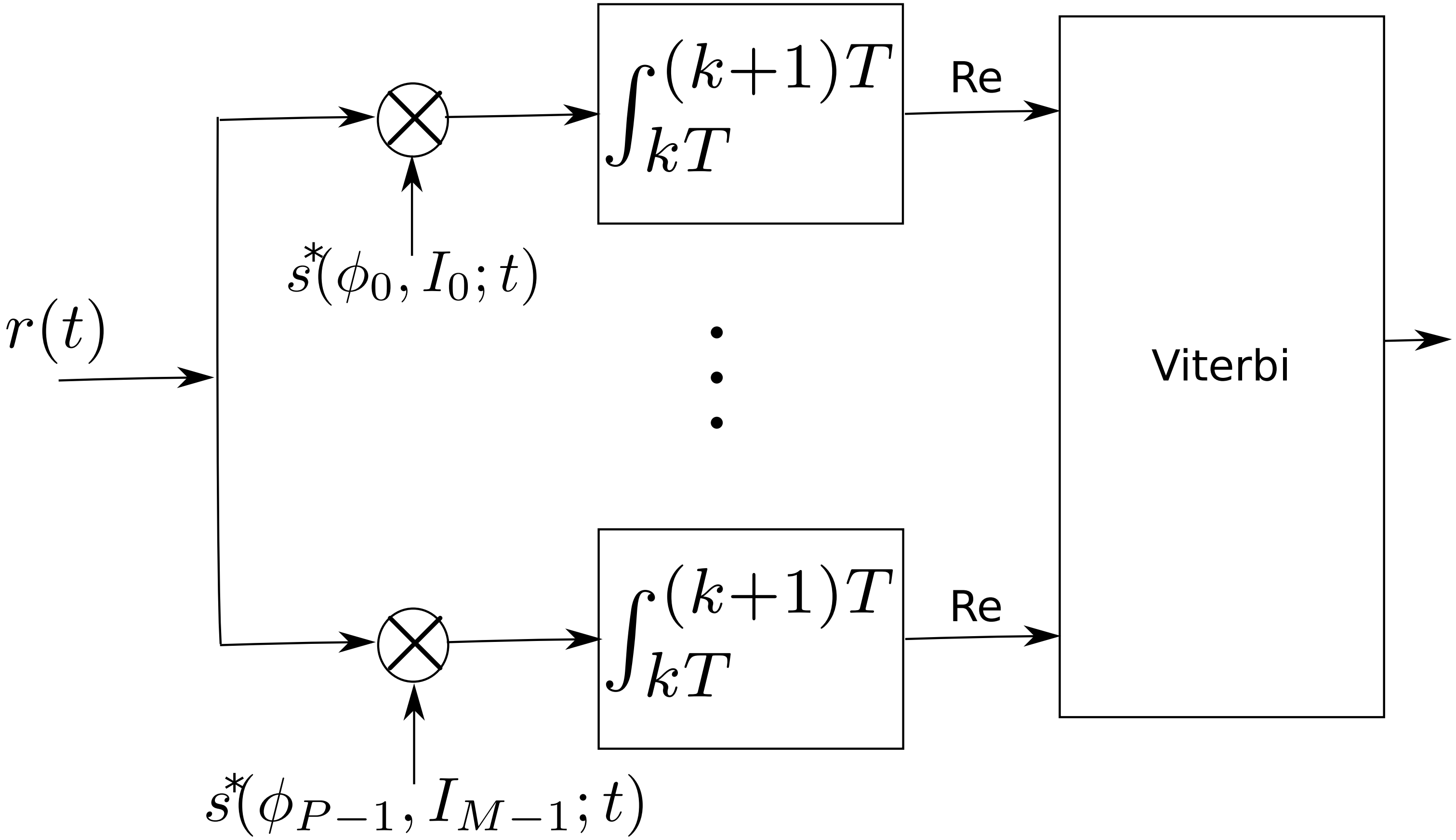
Generación de la señal

$K = 1$, $h = 1/2$, $M = 2$, $g(t)$ pulso cuadrado



Detección

Diagrama del receptor



Anexo: Prestaciones

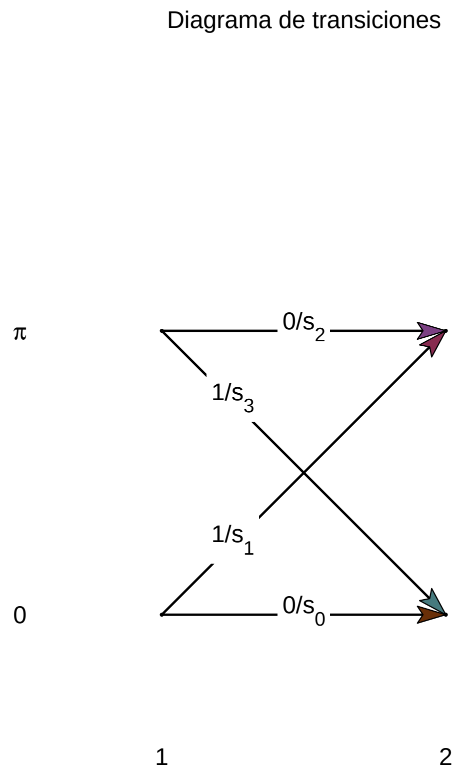
Distancia entre dos señales globales $x_i(t) = Ae^{j\phi(t,\mathbf{I}_i)}$:

$$\begin{aligned} d^2(x_1(t), x_2(t)) &= \int_0^{NT} |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt \\ &= A^2 \int_0^{NT} |e^{j\phi(t,\mathbf{I}_1)} - e^{j\phi(t,\mathbf{I}_2)}|^2 dt \\ &= A^2 \int_0^{NT} |e^{j\phi(t,\mathbf{I}_2)}|^2 |1 - e^{j[\phi(t,\mathbf{I}_1) - \phi(t,\mathbf{I}_2)]}|^2 dt \\ &= A^2 \int_0^{NT} 2\left\{1 - \cos\left[\phi(t,\mathbf{I}_1) - \phi(t,\mathbf{I}_2)\right]\right\} dt \\ &= A^2 \int_0^{NT} 2\left\{1 - \cos\left[\phi(t,\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2)\right]\right\} dt. \end{aligned}$$

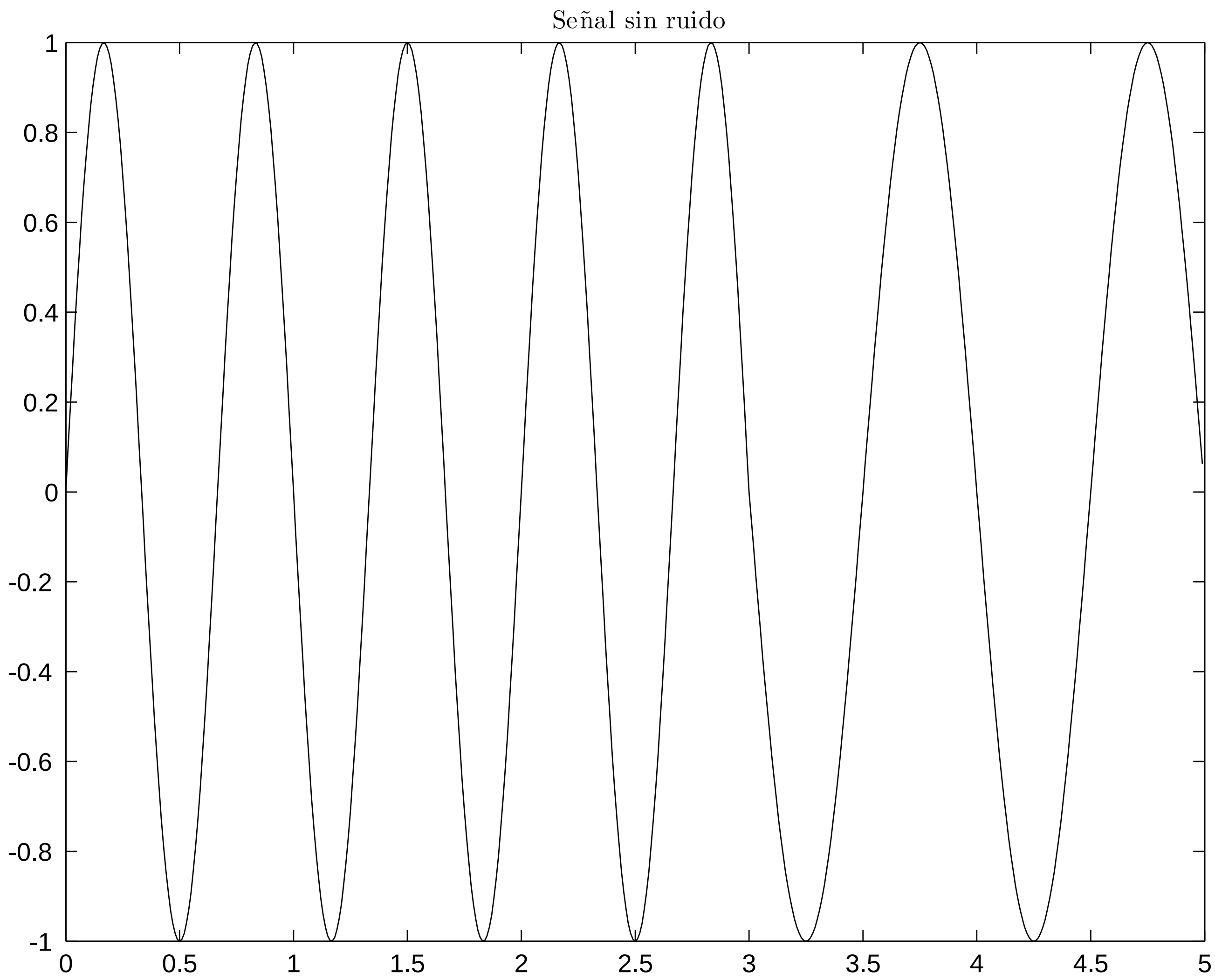
Por tanto la distancia mínima entre secuencias estará dada por

$$d_{min}^2 = 2A^2 \min_{N, \mathbf{I}_1 \neq \mathbf{I}_2} \int_0^{NT} \left\{ 1 - \cos\left[\phi(t, \mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2)\right] \right\} dt.$$

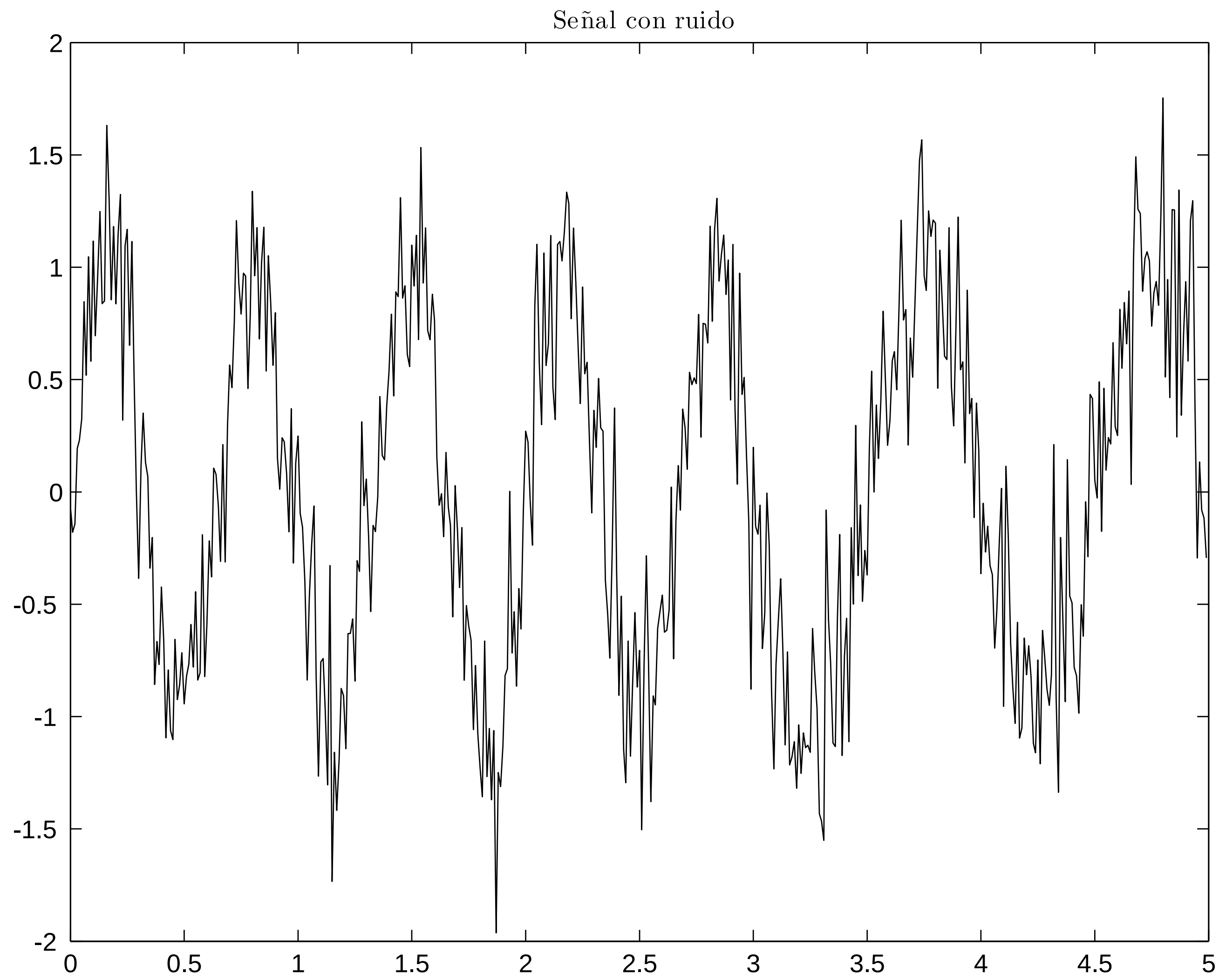
Fichero `SistemaMCM.m`: Simulación del sistema completo para distintas modulaciones CPM



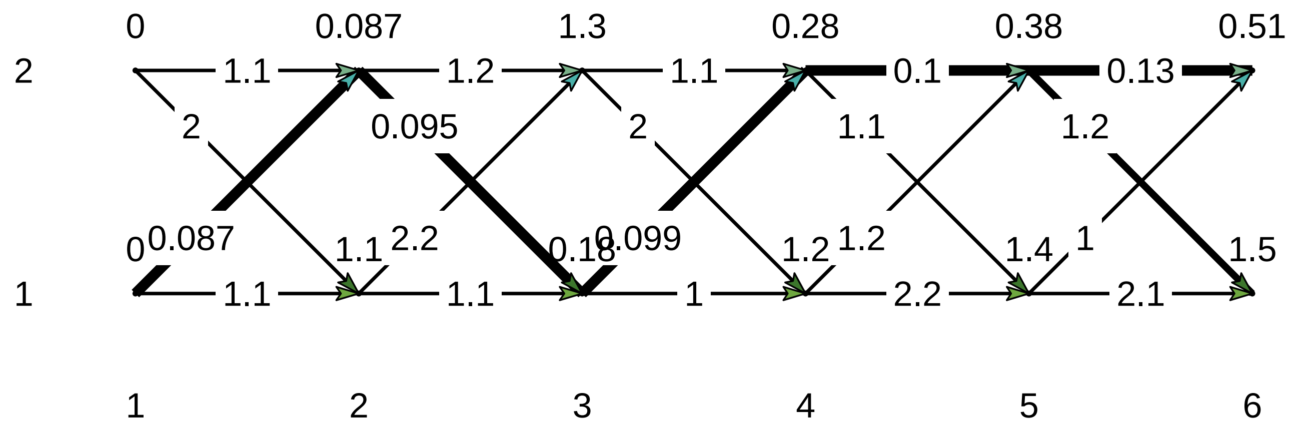
Complementos formativos



Complementos formativos



Detección Viterbi



Problemas de la sección

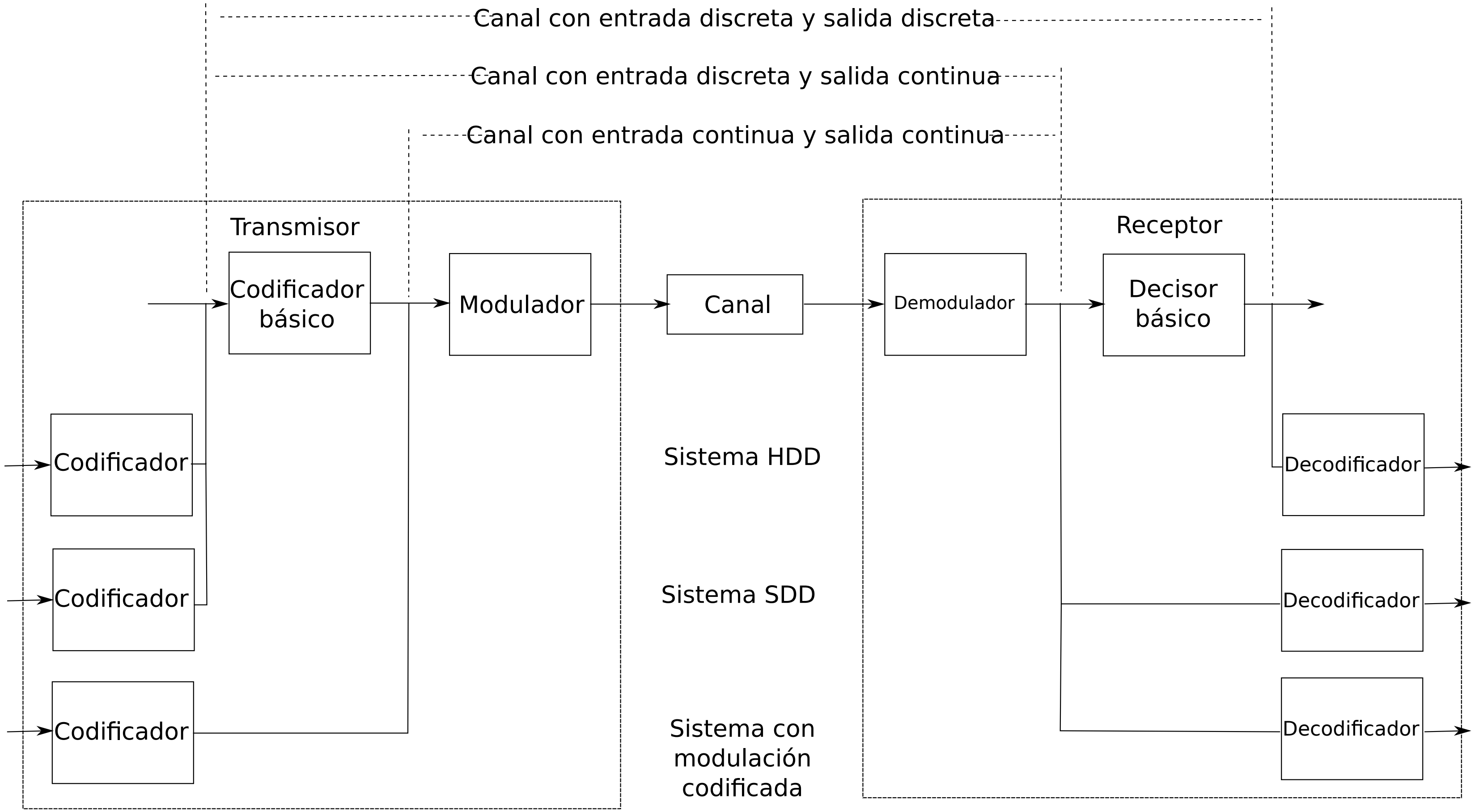
Problemas 3.3, 3.4, 3.5, 3.6

Tema 4: Codificación

- Integración de la codificación de canal
- Codificación convolucional
- Códigos turbo
- Modulaciones codificadas en rejilla

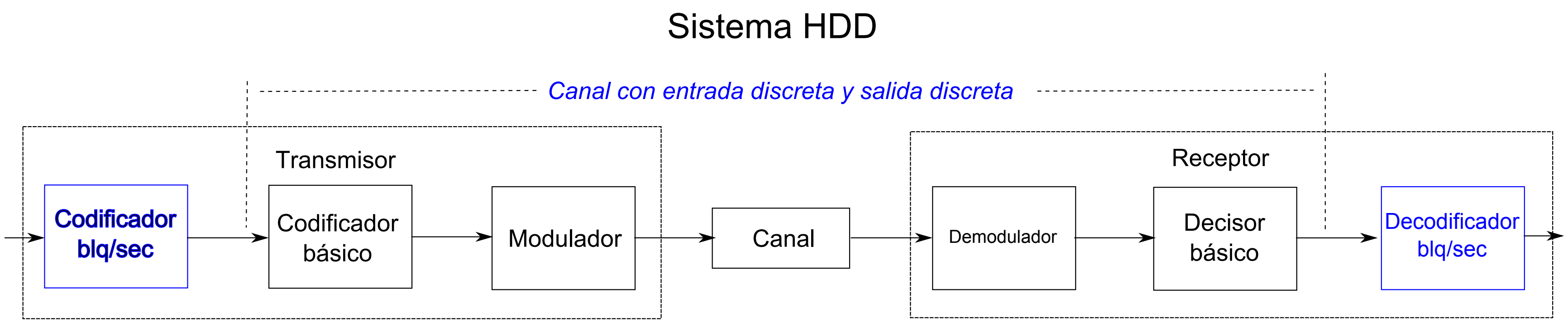
Integración del codificador de canal

La *codificación de canal* y las *modulaciones digitales* se pueden integrar de distintas formas:



Integración del codificador de canal

Podemos *añadir* codificación de canal a un sistema ya completo:
Sistema con decodificación dura (hard-decision decoding (HDD))



Cualquiera de las modulaciones conocidas se puede integrar de esta forma.

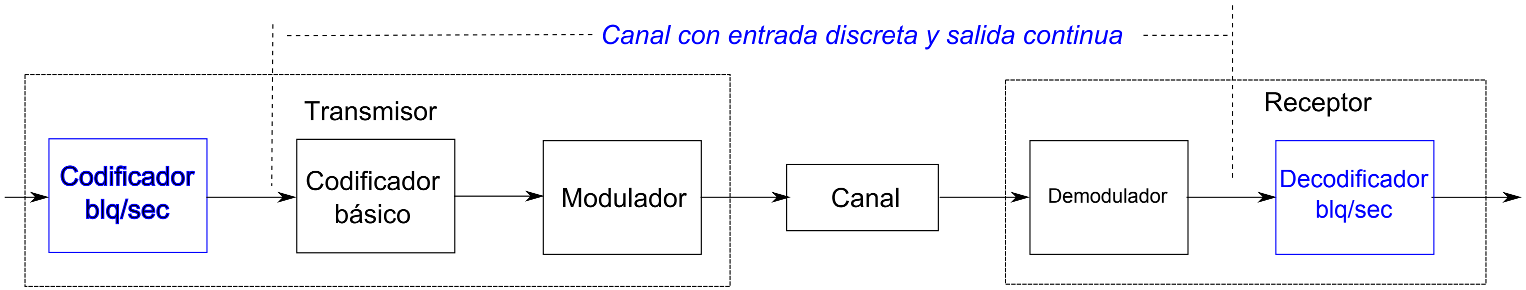
- Con un *codificador de canal por bloques bloques* estudiados en Teoría de la Información con cualquiera de las modulaciones conocidas.
- Con un *codificadores de canal secuenciales*, como los *codificadores convolucionales* que estudiaremos en este tema.

Ganamos fiabilidad a base de *reducir la velocidad binaria útil o aumentar el ancho de banda.*

Integración del codificador de canal

Podemos también *integrar el decodificador de canal* en el receptor digital, permitiéndole acceso a la salida del demodulador digital:
Sistema con decodificación suave (soft-decision decoding (SDD))

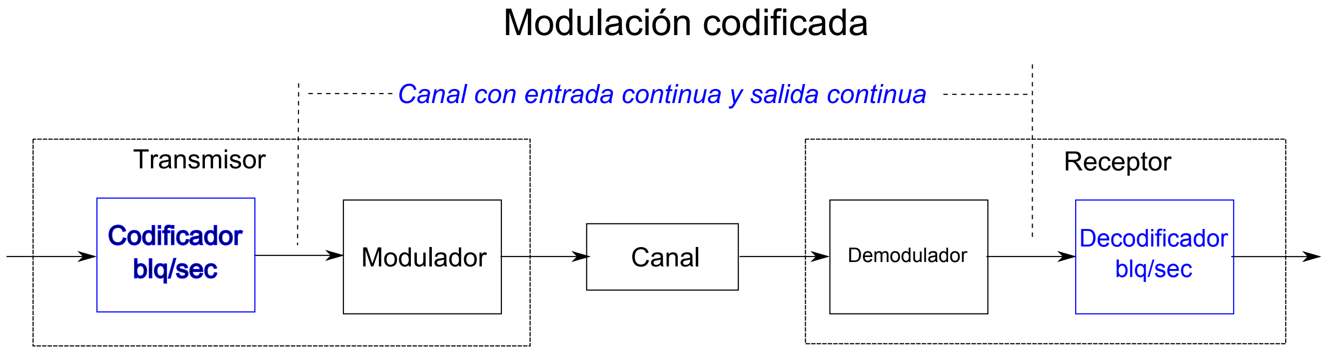
Sistema SDD



Podemos conseguir mejores prestaciones que con sistemas HDD, a costa de una mayor complejidad computacional.

Integración del codificador de canal

Finalmente, el codificador de canal puede sustituir también al codificador básico del transmisor:
Sistema de modulación codificada



Es necesario en los casos en que el codificador de canal debe conocer el alfabeto de señales para hacer la asignación bits $\longrightarrow$ señales de forma eficiente.

Ejemplo HDD vs SDD

Sistema 2-PAM con codificador de canal de *repetición de cada bit tres veces*

- Codificador de canal:

$$0 \mapsto 000, \quad 1 \mapsto 111$$

- Codificador básico:

$$0 \mapsto (\sqrt{E_s}), \;\; 1 \mapsto (-\sqrt{E_s})$$

- Modulador+Canal+Demodulador:

$$\mathbf{s} = (\alpha) \mapsto \mathbf{r} = (\alpha + n), \;\; n \sim N(0, \sigma_n^2)$$

Ejemplo HDD vs SDD

Suponemos $E_s = 1$ y que se recibe $\mathbf{r} = (0{,}1,\ \ 0{,}1,\ \ -1{,}5)$,

- Con decodificación dura:
  - Salida del decisor básico 2-PAM (umbral en el cero): $\mathbf{r} = (0, 0, 1)$
  - Salida del decodificador de canal (decisión por mayoría): $\hat{b} = 0$
- Con decodificación suave:
  Decodificamos conjuntamente el bloque (mínima distancia):

$$d^2\left[\mathbf{r}, (-1, -1, -1)\right] = 1{,}1^2 + 1{,}1^2 + 0{,}5^2 = 2{,}67$$

$$d^2\left[\mathbf{r}, (1, 1, 1)\right] = 0{,}9^2 + 0{,}9^2 + 2{,}5^2 = 7{,}87$$

$$\rightarrow \hat{b} = 1$$

Codificación convolucional

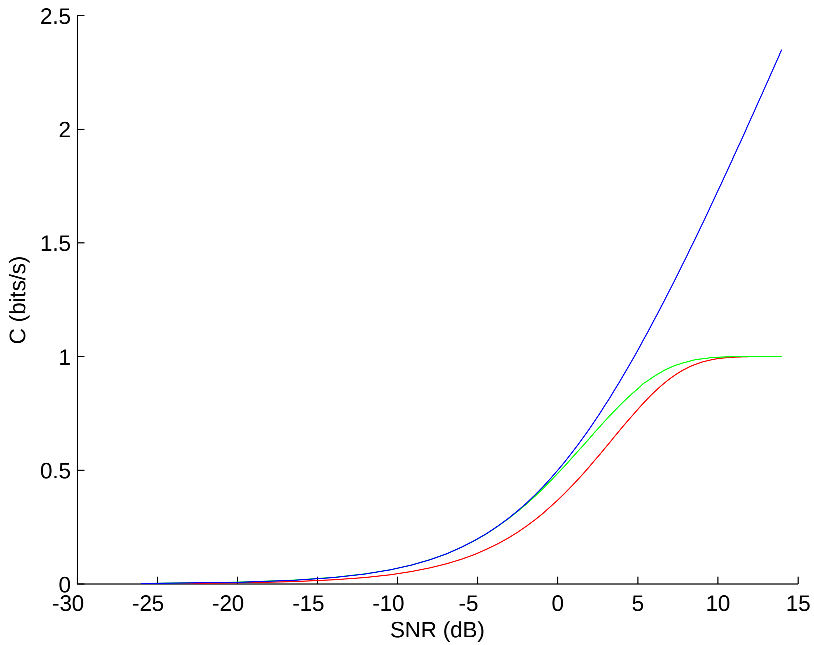
- Descripción
- Codificación
- Transmisión y detección
- Prestaciones

Codificadores convolucionales

- Propuesta por Elias en 1955.
- Redescubierta en 1967 (algoritmo de Viterbi, demostración de su superioridad respecto de los códigos bloque).
- Base de técnicas más complejas como turbocódigos o TCM.
- Ventajas:
  - Buenas prestaciones
  - Baja complejidad computacional incluso con *decodificación suave*.

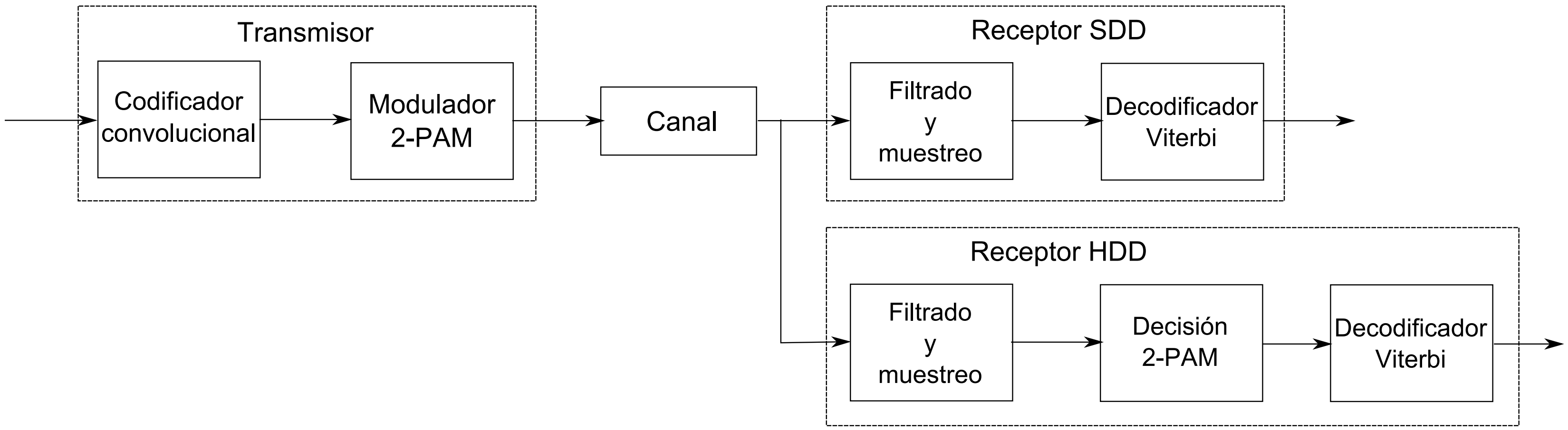
Codificadores convolucionales

Consideramos el entorno de aplicación de baja SNR *(régimen limitado en potencia)*. En estas condiciones no vale la pena utilizar modulaciones más complejas que 2-PAM:



Curva superior: capacidad del canal gaussiano limitado en banda
Curva intermedia: capacidad del cuando la entrada el canal es 2-PAM (alcanzable con decodificación suave)
Curva inferior: capacidad del canal cuando la entrada son señales 2-PAM y la salida se cuantifica en dos niveles (máxima alcanzable con decodificación dura)

Sistema basado en codificación convolucional



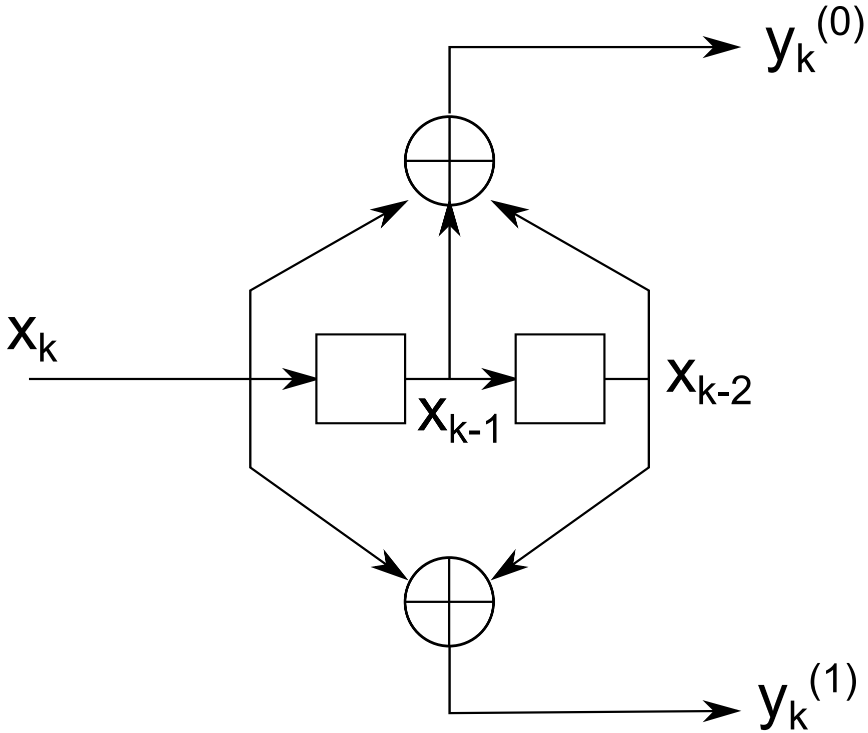
Codificadores convolucionales

Definiciones:

- Un *codificador convolucional* es un *filtro lineal invariante* en *aritmética binaria* que puede tener *varias entradas y salidas* (más salidas que entradas para que se introduzca redundancia)
- *Tasa de codificación:* m/n, m: Número de entradas, n: número de salidas
- Por tanto no trabaja por bloques sino por secuencias de bits: a cada secuencia de bits de entrada $(x_k^i)_{i=1,\ldots,m}$ hace corresponder una *secuencia código* $(y_k^{(j)})_{j=1,\ldots,n}$.
- El codificador es *sistemático* si una de las salidas coincide con la entrada.
  En ese caso las demás salidas se denominan de *paridad* o *redundancia*.
- El codificador es *recursivo* si incluye *realimentación* (análogo a filtro IIR).

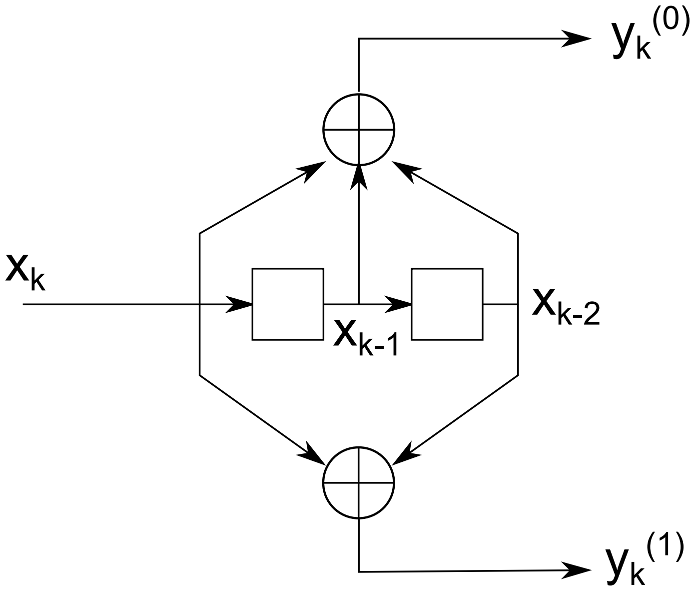
Codificadores convolucionales

Ejemplo 1: codificador no sistemático no recursivo de tasa 1/2



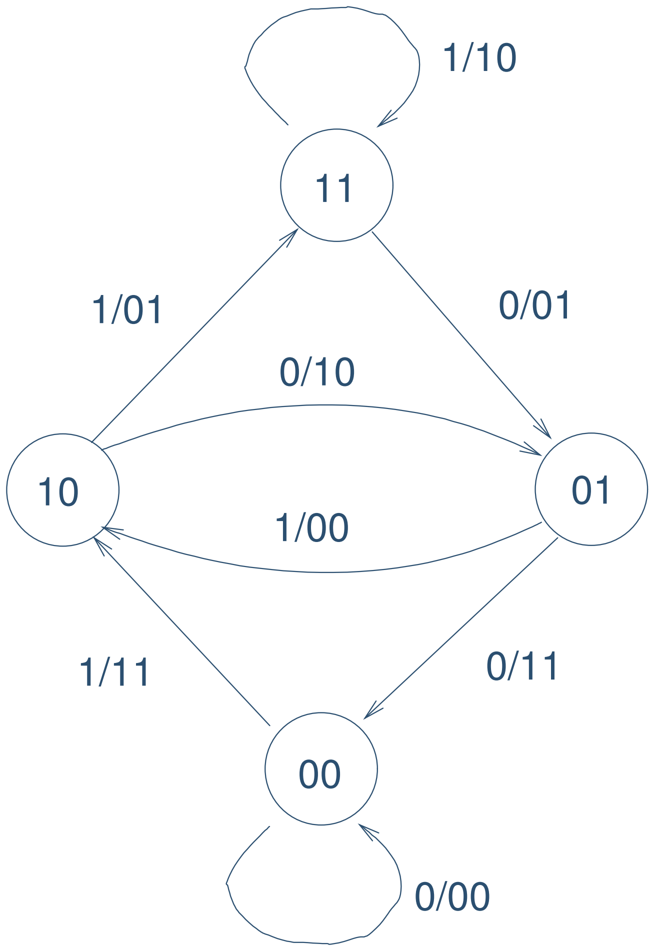
Codificadores convolucionales

Representación en el dominio del tiempo:



$$y_k = \begin{pmatrix} y_k^{(0)} & y_k^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k & x_{k-1} & x_{k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagrama de estados. Estado: (x_{k-1}, x_{k-2}),
Etiquetas: $x_k/y_k^{(0)}y_k^{(1)}$



Codificadores convolucionales

- title1
- Preámbulo

Tema 1: Receptores óptimos

Representación de señales deterministas

Modelado probabilístico del ruido

Receptores óptimos

Interferencia entre símbolos

Tema 2: Prestaciones

Probabilidad de error

Capacidad de canal

Tema 3: Modulaciones con memoria

Introducción a las mod. con memoria

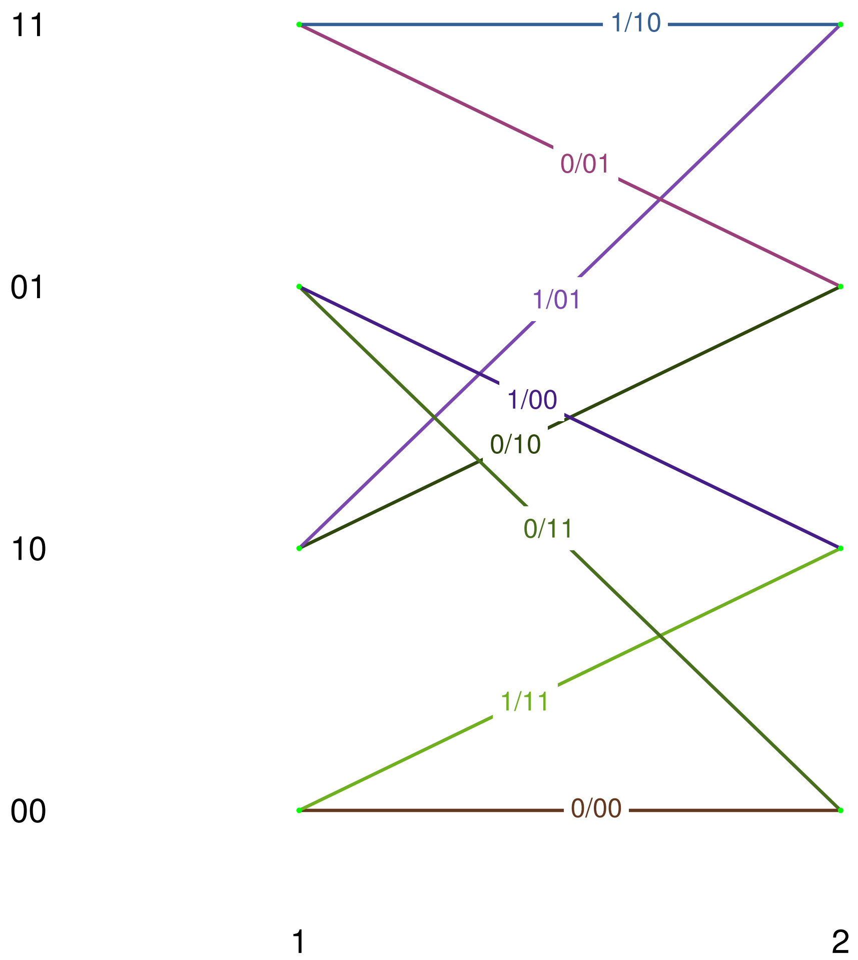
Modulaciones de fase continua

Tema 4: Codificación

Codificación convolucional

- Codificación convolucional
- Codificadores

Diagrama en rejilla



Codificadores convolucionales

Representación algebraica

- Consideramos secuencias de bits (x_k) que son cero hasta un cierto instante k_0. Hacia el futuro pueden ser infinitas.
- *Transformada D* de una secuencia (D: *delay*) (análoga a la transformada Z): es la serie de potencias *(serie formal de Laurent)*

$$(x_k) \mapsto x(D) = \sum_k x_k D^k = x_{k_0} D^{k_0} + x_{k_0+1} D^{k_0+1} + \dots$$

- Propiedades análogas a la de la transformada Z:
  - El *retardo* unidad corresponde a la multiplicación de la transformada por D:

$$(x_k) \mapsto x(D) \Rightarrow (y_k = x_{k-1}) \mapsto y(D) = Dx(D)$$

  - El *producto* de dos transformadas (que está bien definido) es la transformada de la *convolución* de las secuencias.

Codificadores convolucionales

- Toda secuencia no nula tiene inversa multiplicativa.
- Por tanto el conjunto de las transformadas tiene estructura de *cuerpo*.
- Las *expresiones racionales* en la variable D se interpretan como secuencias infinitas hacia el futuro que se pueden calcular por división de polinomios:

$$\frac{f(D)}{g(D)} = x_{-M}D^{-M} + x_{-M+1}D^{-M+1} + \ldots + x_0 + x_1 D + \ldots$$

- Una transformada $x(D)$ tiene una representación racional si y sólo si es *periódica* a partir de algún instante.

Codificadores convolucionales

Representación algebraica

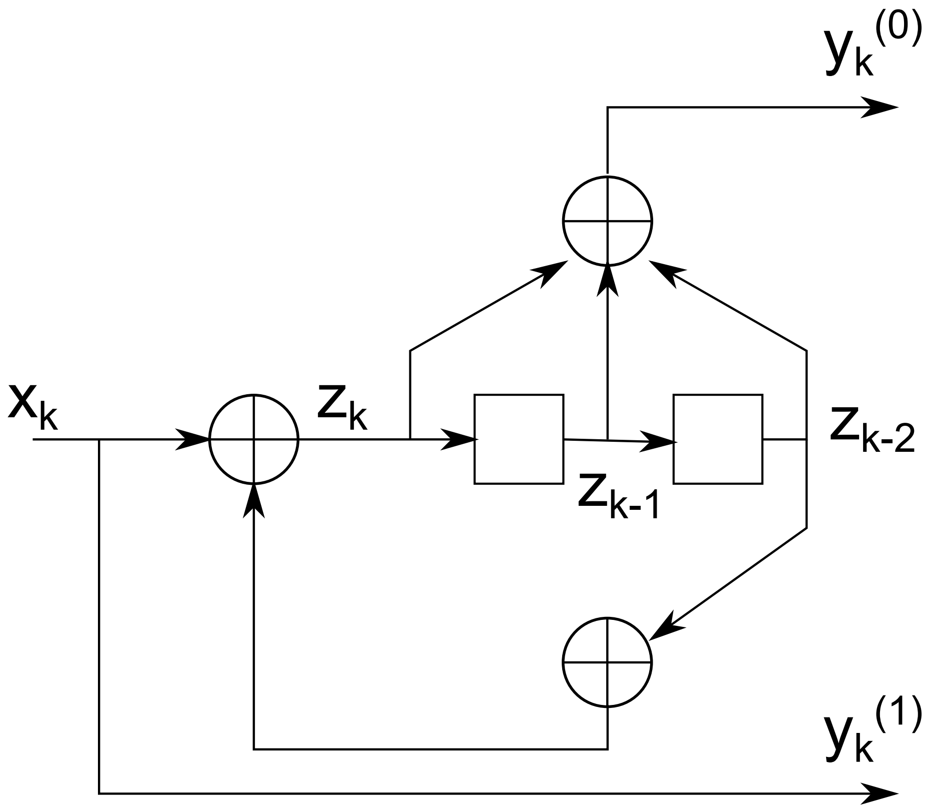
$$y_k = \begin{pmatrix} y_k^{(0)} & y_k^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k & x_{k-1} & x_{k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

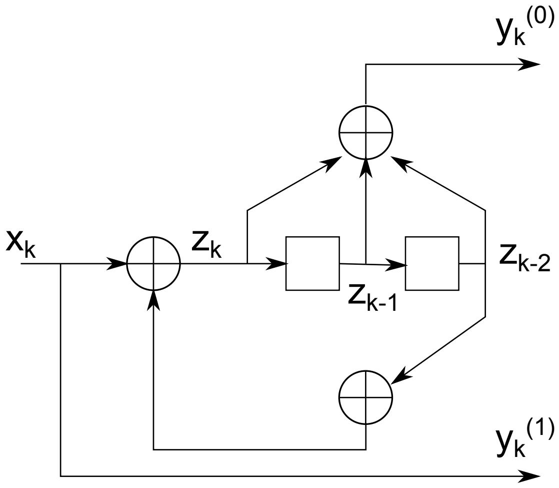
$$y(D) = \begin{pmatrix} y^{(0)}(D) & y^{(1)}(D) \end{pmatrix} = x(D) \begin{pmatrix} D^2 + D + 1 & D^2 + 1 \end{pmatrix}$$

Codificadores convolucionales

Ejemplo 2: codificador sistemático recursivo de tasa 1/2



Codificadores convolucionales



$$z_k = x_k + z_{k-2} \qquad \Leftrightarrow z(D) = x(D) + D^2 z(D),$$

$$y_k^{(0)} = z_k + z_{k-1} + z_{k-2} \qquad \Leftrightarrow y^{(0)}(D) = (D^2 + D + 1)z(D),$$

luego

$$y^{(0)}(D) = \frac{D^2 + D + 1}{D^2 + 1} x(D),$$

y, matricialmente,

$$y(D) = \begin{pmatrix} y^{(0)}(D) & y^{(1)}(D) \end{pmatrix} = x(D) \begin{pmatrix} \frac{D^2+D+1}{D^2+1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Codificadores convolucionales

Con la representación algebraica se pueden comprobar fácilmente algunas propiedades de los codificadores.
P. ej.: Los dos codificadores que hemos presentado como ejemplo *producen las mismas secuencias de salida*:

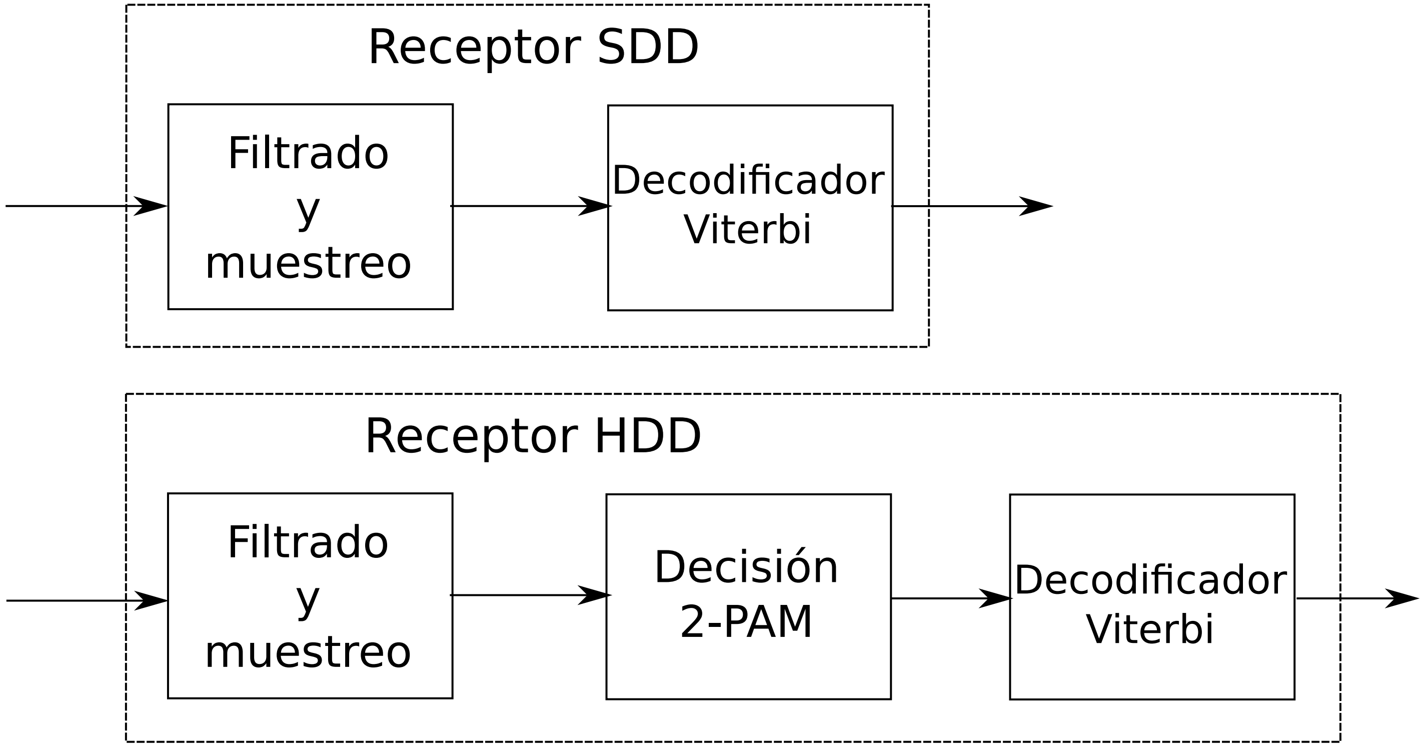
$$\begin{pmatrix} y^{(0)}(D) & y^{(1)}(D) \end{pmatrix} = x(D) \begin{pmatrix} \frac{D^2+D+1}{D^2+1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y^{(0)}(D) & y^{(1)}(D) \end{pmatrix} = x(D) \begin{pmatrix} D^2+D+1 & D^2+1 \end{pmatrix}$$

- ¿Qué secuencias de entrada darán lugar a secuencias de salida de duración finita en el primer codificador?
- Si la entrada al segundo es $x_0(D)$, ¿qué entrada al primero producirá la misma secuencia de salida?

Transmisión y detección

La detección óptima consiste en hallar la secuencia código más cercana a la secuencia recibida.



Prestaciones

- La distancia al cuadrado d^2 entre secuencias de señales es proporcional al número de bits distintos de las secuencias código correspondientes (*distancia de Hamming* d_H entre las secuencias código).
Ejemplo:

$$b_1 = 00010010 \mapsto s_1 = A(1,1,1,-1,1,1,-1,1)$$

$$b_2 = 01000010 \mapsto s_2 = A(1,-1,1,1,1,1,-1,1)$$

$$b_1 + b_2 = 01010000, \|s_1 - s_2\|^2 = A^2\|(0,2,0,-2,0,0,0,0)\|^2$$

$$= A^2 \cdot 2 \cdot 2^2$$

En general,

$$d^2 = 4A^2 d_H$$

Prestaciones

- El número de bits distintos de $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{c}_2$ es el *número de unos* de $\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2$ (*peso* de la palabra código).
- Como el código es lineal, si $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{c}_2$ son dos secuencias código, $\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2$ es también una secuencia código.
- Por tanto *hallar las distancias mínimas entre secuencias código equivale a hallar la palabra código no nula de menor peso.*

Prestaciones

Puesto como fórmula:

- $y = (b_0, b_1, \ldots)$: Secuencia de bits de salida del codificador
- $w(y)$: Peso de una secuencia de bits
- $d_H(y_1, y_2) = w(y_1 - y_2)$: Distancia de Hamming entre dos secuencias de bits
- $s(y) = \sum_k (-1)^{b_k} A\psi(t - kT)$: Señal transmitida

Tenemos

$$d^2(s(y_1), s(y_2)) = 4A^2 d_H(y_1, y_2) = 4A^2 w(y_1 - y_2)$$

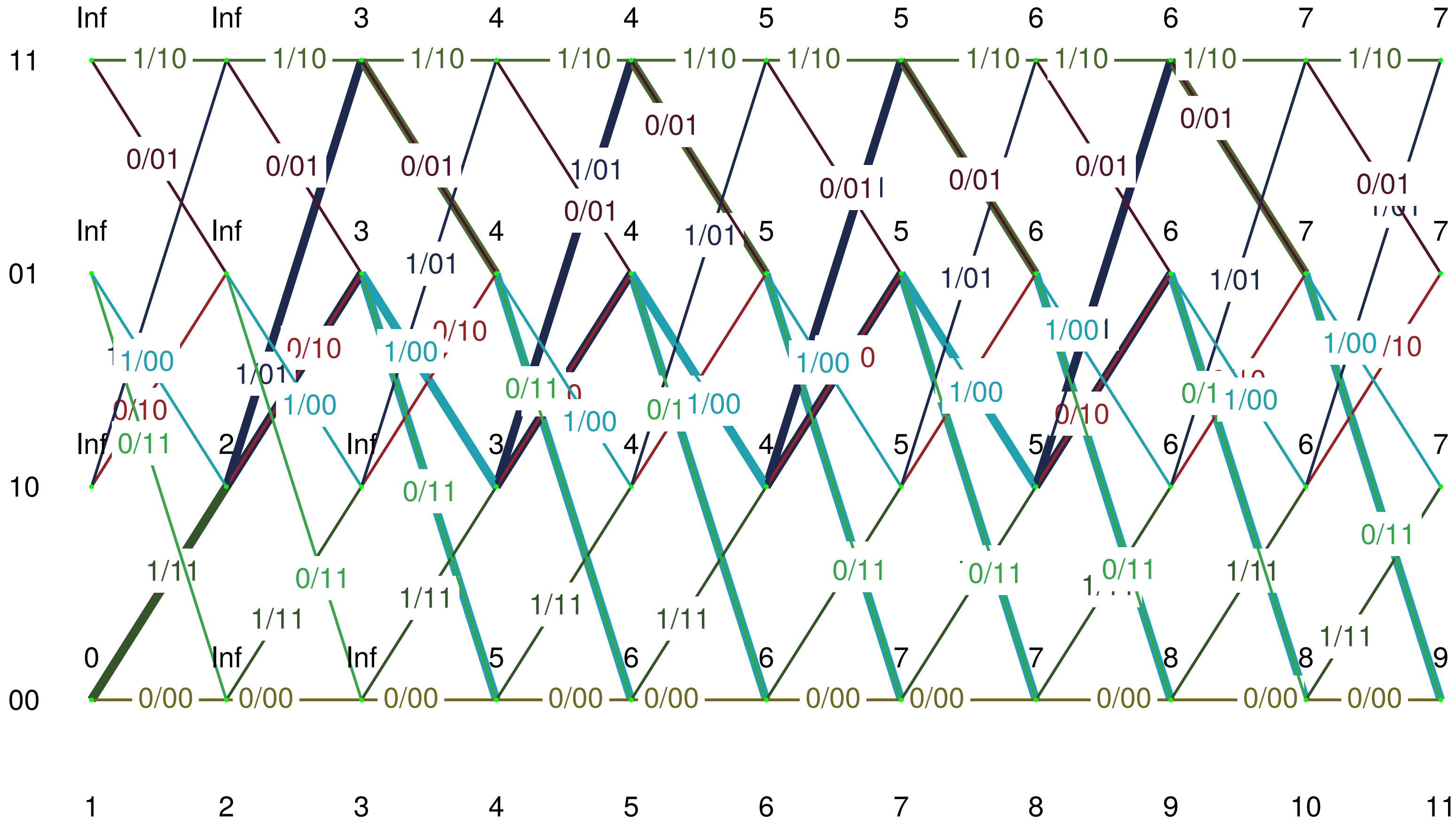
Cod. convolucional: prestaciones

Las secuencias código de menor peso se pueden hallar con el algoritmo de Viterbi aplicado a una red con

- Estado de partida: cero
- Coste de los arcos que van del estado cero el estado cero: Infinito
- Coste de los demás arcos que parten del estado cero salvo en la primera etapa: Infinito
- Coste de los demás arcos: Número de unos

Modificación del algoritmo: Los caminos finalizan *al volver al estado cero*.

Cod. convolucional: prestaciones



Hasta el instante 7 no estamos seguros de que el menor peso no nulo es 5.

Y hasta el instante 9 no estamos seguros de que hay un único evento de error con este peso.

Cod. convolucional: prestaciones

Aproximación de P_b (codificador de tasa m/n):
Evento de error i:
α_i: números de unos de salida
β_i: números de unos de entrada

$$d^2_{min}(\alpha_i) = \alpha_i(2A)^2, (d_{min}(\alpha_i)/2)^2 = \alpha_i A^2$$

$$P_b \leq P_{b,sup} \approx \sum_i \underbrace{B}_{v} \frac{\beta_i}{mB} Q\left(\sqrt{\frac{(d_{min}(\alpha_i)/2)^2}{N_0/2}}\right)$$

$$= \frac{1}{m}\sum_i \beta_i Q\left(\sqrt{\frac{\alpha_i A^2}{N_0/2}}\right)$$

$$E_b = nA^2/m$$

Cod. convolucional: prestaciones

En nuestro ejemplo: $m/n = 1/2$, $\alpha_1 = 5$, $\beta_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 6$, $\beta_2 = \beta_3 = 2$:

$$E_b = 2A^2$$

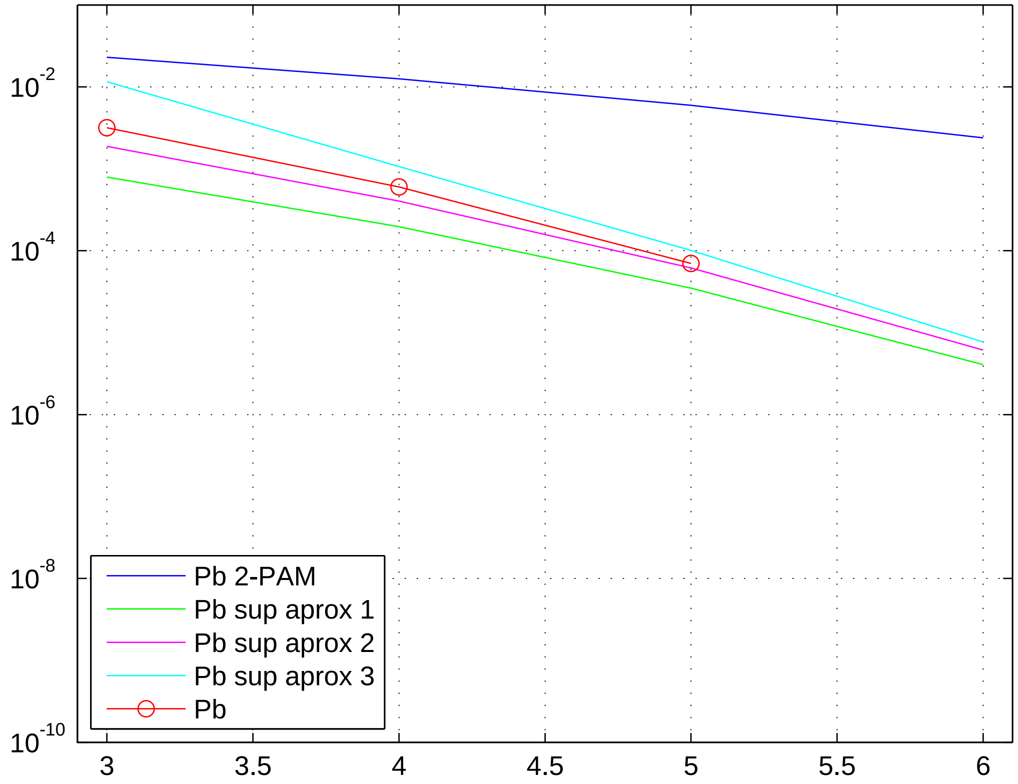
$$\begin{aligned} P_b \leq P_{b,sup} &\approx 1 \cdot Q\left(\sqrt{\frac{5A^2}{N_0/2}}\right) + 2 \cdot 2 \cdot Q\left(\sqrt{\frac{6A^2}{N_0/2}}\right) + \ldots \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{5E_b/2}{N_0/2}}\right) + 4Q\left(\sqrt{\frac{6E_b/2}{N_0/2}}\right) + \ldots \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{5E_b}{N_0}}\right) + 4Q\left(\sqrt{\frac{6E_b}{N_0}}\right) + \ldots \end{aligned}$$

Cod. convolucional: prestaciones

El *método de la función de transferencia de grafo* (ver apuntes), que no estudiaremos, proporciona una verdadera cota superior en forma de expresión cerrada de la cota de la unión (suma de los términos correspondientes a todos los vecinos).

Complementos formativos

Gráfica de probabilidad de error y cotas teóricas (para uno, dos e infinitos eventos de error) obtenidas con `test_cod_conv_graficas_pe.m`



Problemas de la sección

Problemas del 4.2 al 4.7

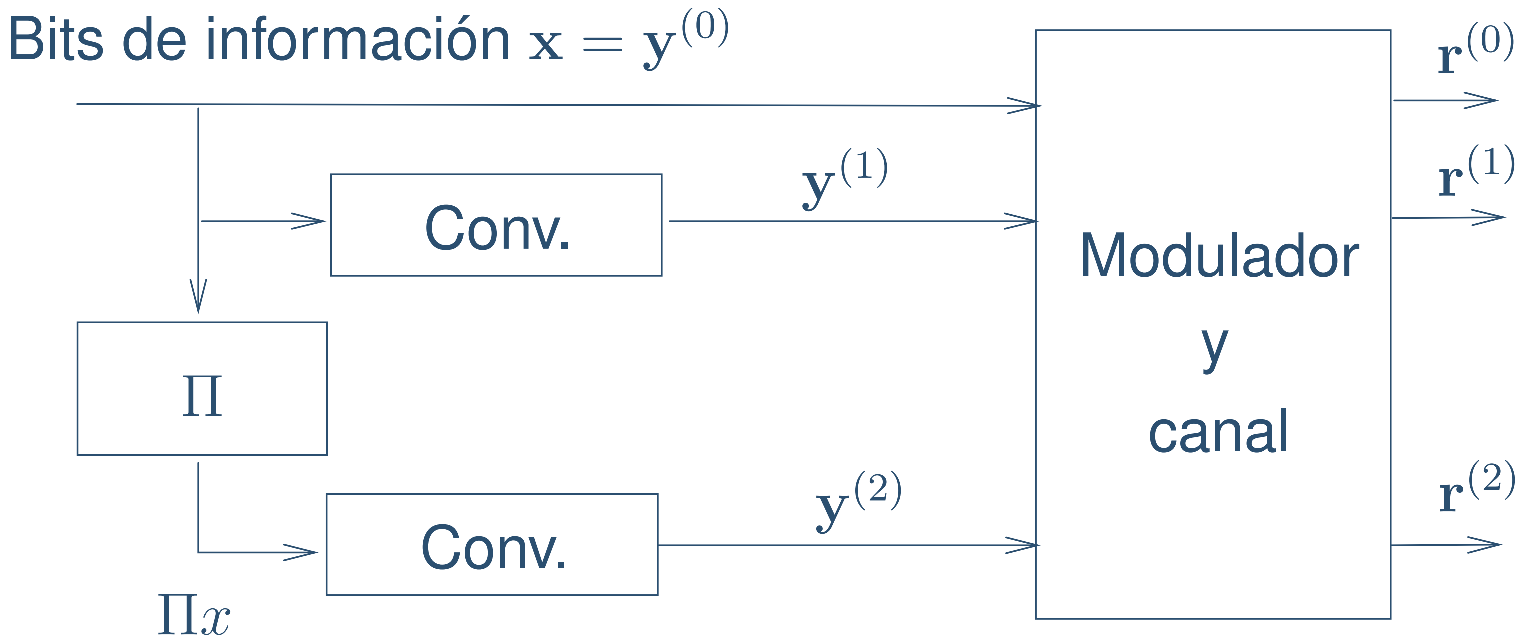
Códigos turbo

- Descripción
- Codificación
- Transmisión y detección
- Prestaciones

Códigos turbo

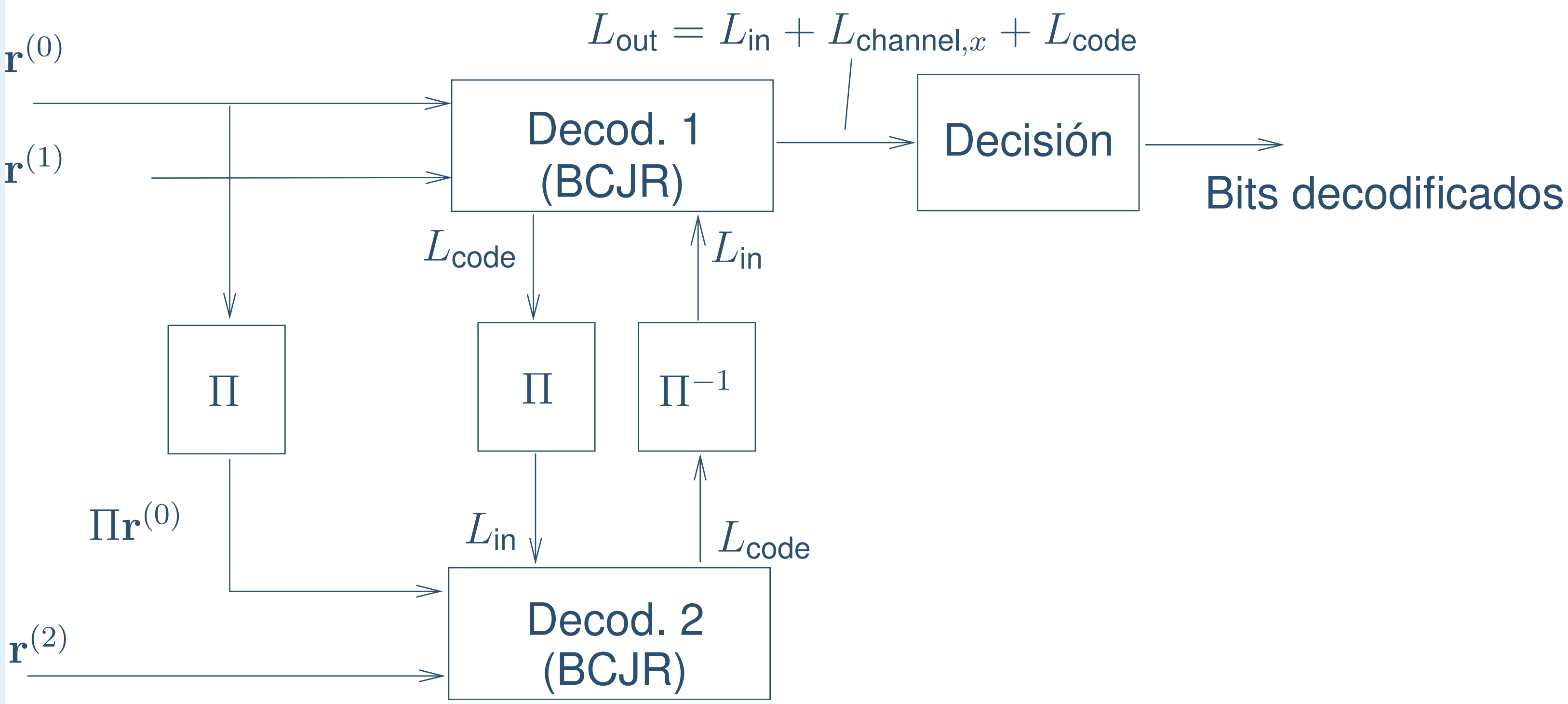
- Propuestos por Berrou, Glavieux y Thitimajshima en 1993.
- Nuevo enfoque para diseño de códigos: en lugar de intentar maximizar la distancia mínima entre palabras código, se generan códigos con características similares a las de los códigos aleatorios ...
- ... pero con una estructura que hace abordable computacionalmente la decodificación mediante algoritmos de cálculo aproximado de la probabilidad a posteriori.
- Primer sistema práctico que permite el acercamiento al límite de Shannon.

Codificador turbo con concatenación en paralelo

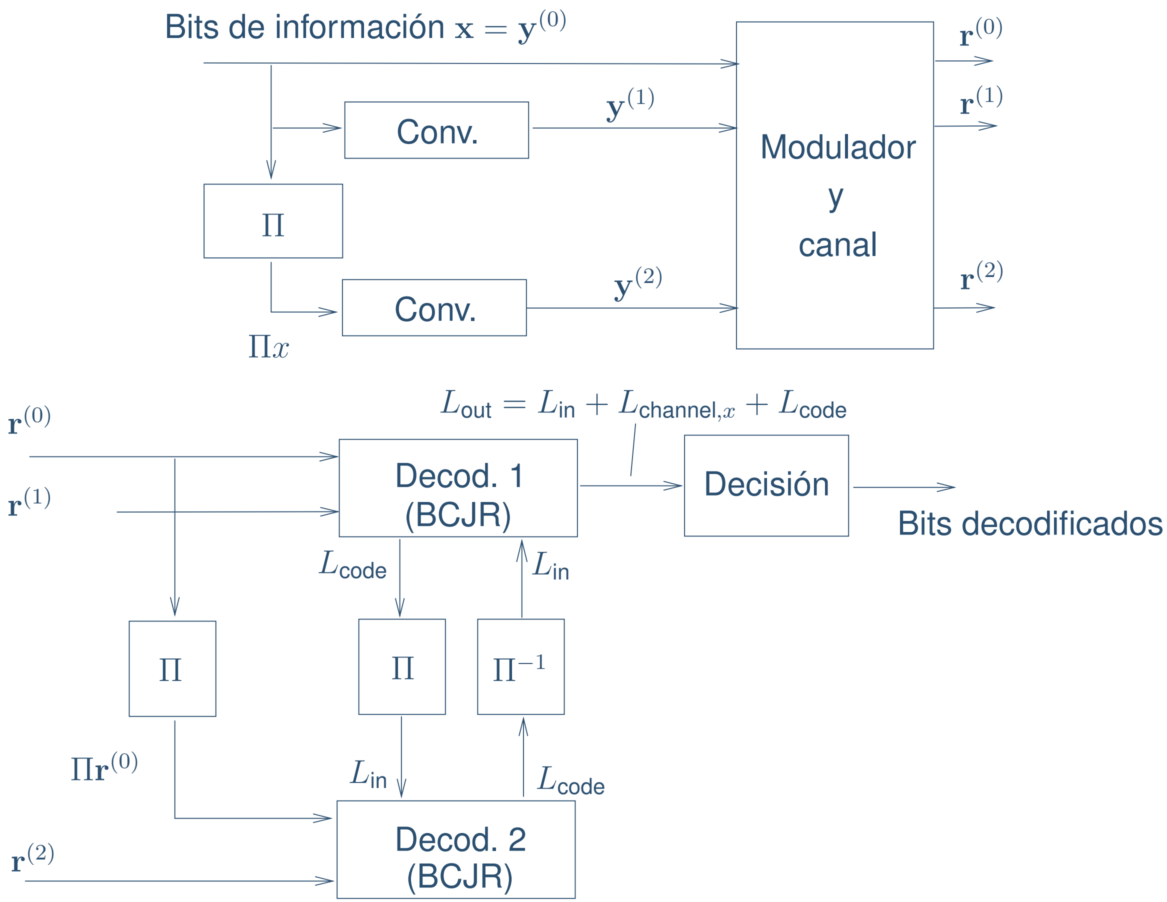


Códigos turbo

Decodificador



Codificador y decodificador



Algoritmo BCJR

Los códigos turbo hacen uso del algoritmo BCJR para la decodificación.

- Alternativa al algoritmo de Viterbi para la decodificación en modulaciones con memoria.
- Se aplica a secuencias finitas con estados inicial y final conocidos.
- En lugar de proporcionar la secuencia de símbolos más probable a posteriori, proporciona *las probabilidades a posteriori de cada símbolo individual*.

Algoritmo de decodificación

El decodificador, que recibe las versiones ruidosas de los datos enviados, aplica *iteraciones del algoritmo BCJR* para obtener de forma aproximada la palabra código más probable a posteriori.

- El primer decodificador estima las probabilidades de posteriori de los bits $\mathbf{x}$ a partir de las observaciones $\mathbf{r}^{(0)}$ y $\mathbf{r}^{(1)}$, suponiendo probabilidades a priori de $1/2$.
- El segundo decodificador reestima las probabilidades a posteriori de los bits $\mathbf{x}$ utilizando $\mathbf{r}^{(0)}$ y $\mathbf{r}^{(2)}$ y probabilidades a priori correspondientes a información proporcionada por el primer decodificador.
- Se repite el apartado 1 utilizando ahora como probabilidades a priori información obtenida en el apartado 2.
- Se repiten sucesivamente los apartados 2 y 3 hasta que se satisface la condición de parada que se establezca.

Prestaciones de los códigos turbo

- Son códigos lineales $\Rightarrow$ Las secuencias de menor peso nos indican la menor distancia a las secuencias vecinas.
- Para el CC dado por

$$y(D) = \frac{1+D^2}{1+D+D^2}x(D)$$

las secuencias código de menor peso corresponden a

$$x(D) = D^n(1+D+D^2),\ y^{(2)}(D) = D^n(1+D^2)$$

$$x^{\text{(perm)}}(D) = D^m(1+D+D^2),\ y^{(2)}(D) = D^m(1+D^2)$$

luego tienen $3+2\cdot 2=7$ unos:

3 unos en los bits de info $+\ 2\cdot 2$ unos en los bits de paridad

Prestaciones de los códigos turbo

La mejora respecto de los CC está en el *número de vecinos:*
Notamos por B la longitud de las secuencias código.

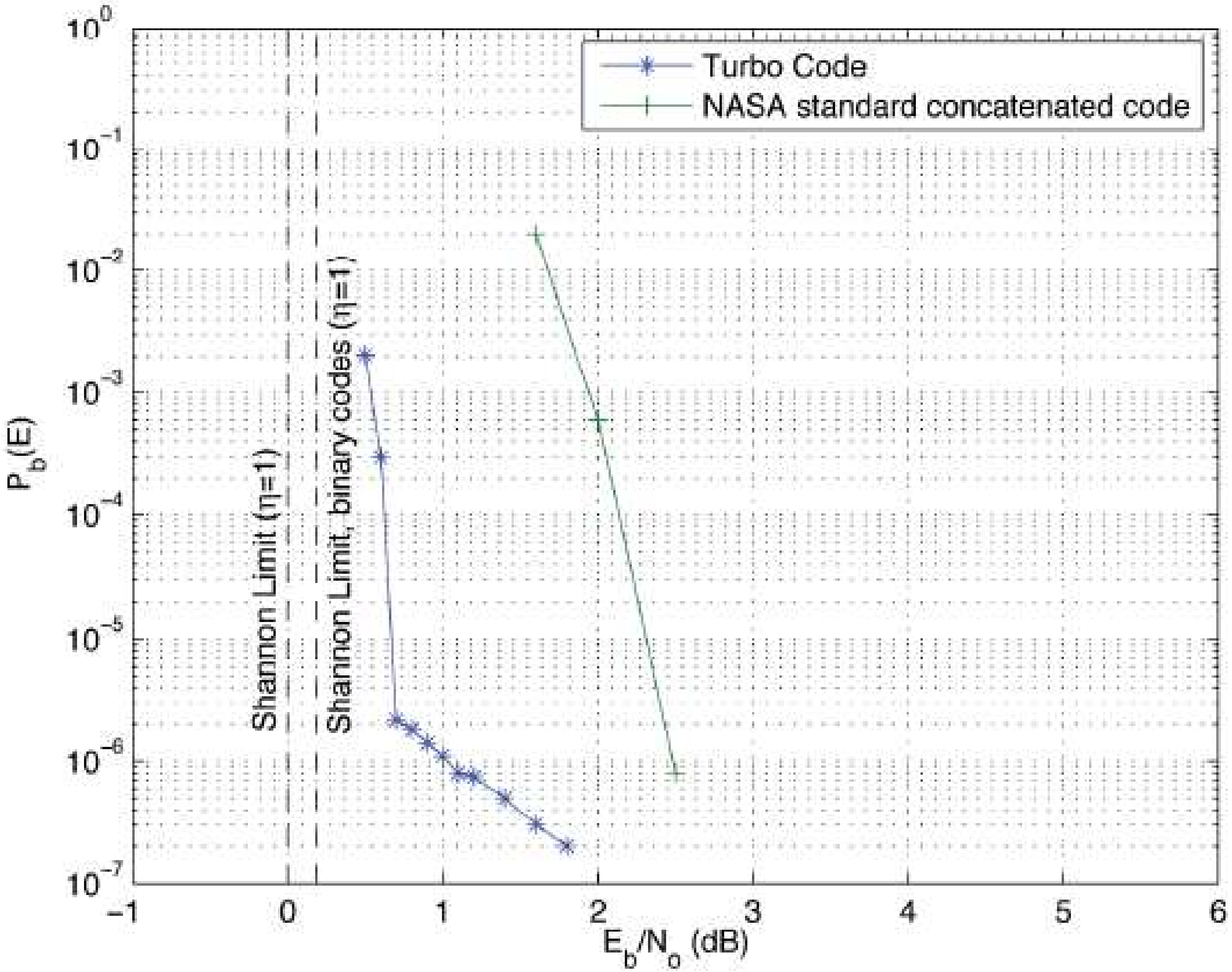
- En el CC tenemos $B-2$ secuencias código de peso mínimo (3+2) (posiciones en las que pueden comenzar los *tres unos seguidos*):
  $v = B - 2 \approx B$
- En el TC, como la permutación es aleatoria, tenemos que calcular el *número medio* de palabras de peso mínimo (3+2+2). Este es el producto de
  - Número de secuencias de entrada con tres unos consecutivos: $B-2$
  - Probabilidad de que una de estas secuencias se convierta después de la permutación en otra secuencia con tres unos consecutivos:

$$\frac{\text{conjuntos de tres números consecutivos entre 1 y } B}{\text{conjuntos de tres números entre 1 y } B} = \frac{B-2}{\binom{B}{3}}$$

Por tanto

$$v = (B-2)\frac{B-2}{\binom{B}{3}} = (B-2)\frac{(B-2)}{B(B-1)(B-2)/3!} \approx \frac{6}{B}$$

Prestaciones de los códigos turbo

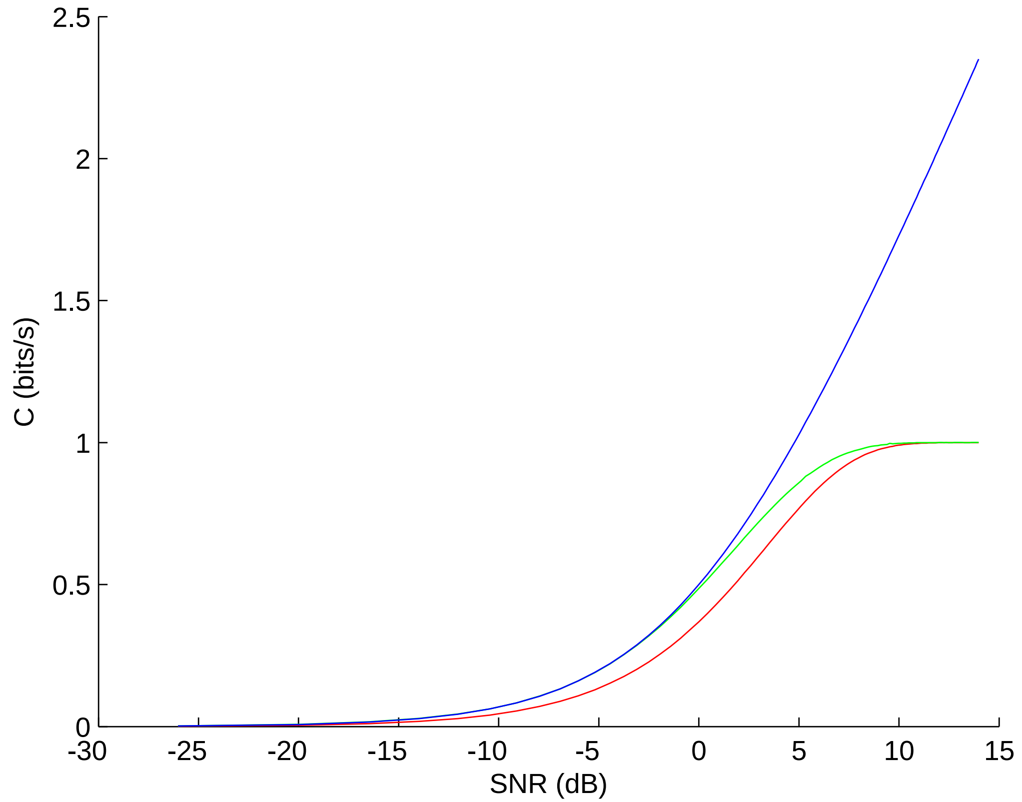


Modulaciones codificadas en rejilla

- Introducción
- Descripción
- Codificación
- Transmisión y detección
- Prestaciones

Consideramos ahora el caso $s/n > 3$ dB: resulta interesante utilizar modulaciones que no sean 2-PAM.

Curvas de arriba a abajo: capacidad, capacidad 2-PAM SDD, capacidad 2-PAM HDD

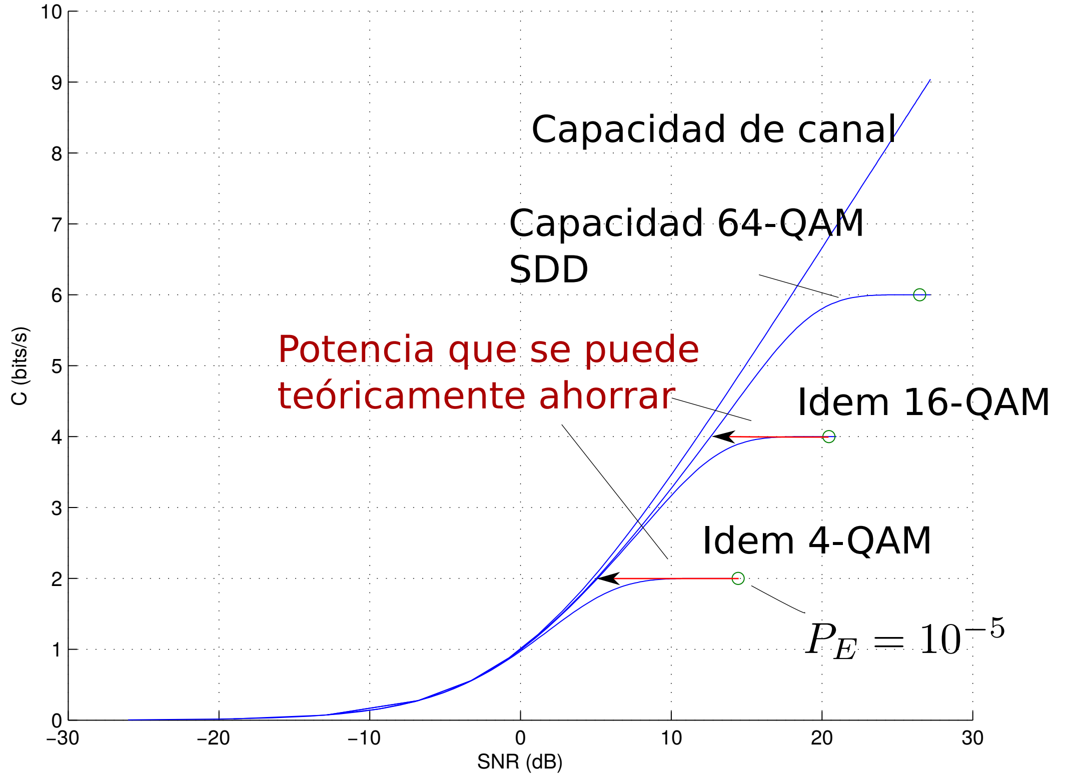


Codificación en régimen limitado en banda

Aunque tampoco es necesario utilizar modulaciones muy complejas:

Para transmitir N bits por símbolo

- Una modulación QAM de $M = 2^N$ señales no es muy eficiente.
- Pero con una modulación QAM de $M = 2^{N+1}$ señales y codificación de canal podemos teóricamente acercarnos a la capacidad del canal.



Codificación en régimen limitado en banda

La situación para alta s/n se denomina *régimen limitado en banda* porque, de acuerdo con la fórmula de Shannon, cuando s/n es alta la capacidad crece de forma aproximadamente lineal con W y logarítmicamente con s:

$$C = W \log_2 \left(1 + \frac{s}{n}\right) \approx W \log_2 \left(\frac{s}{n}\right) = W \log_2 \left(\frac{s}{N_0 W}\right)$$

Por eso el principal factor limitante es W.

Codificación en régimen limitado en banda

Aparece una diferencia importante

- Con la modulación 2-PAM no hay que preocuparse por la asignación entre palabras código (bits) y señales, puesto que la distancia (de Hamming) entre palabras código es proporcional a la distancia (euclídea) al cuadrado entre señales.
- Cuando se utilizan otras modulaciones hay que definir con cuidado el mapeo entre palabras código y señales para obtener una buena distancia mínima entre señales.

Modulaciones codificadas en rejilla

Los sistemas TCM se basan en

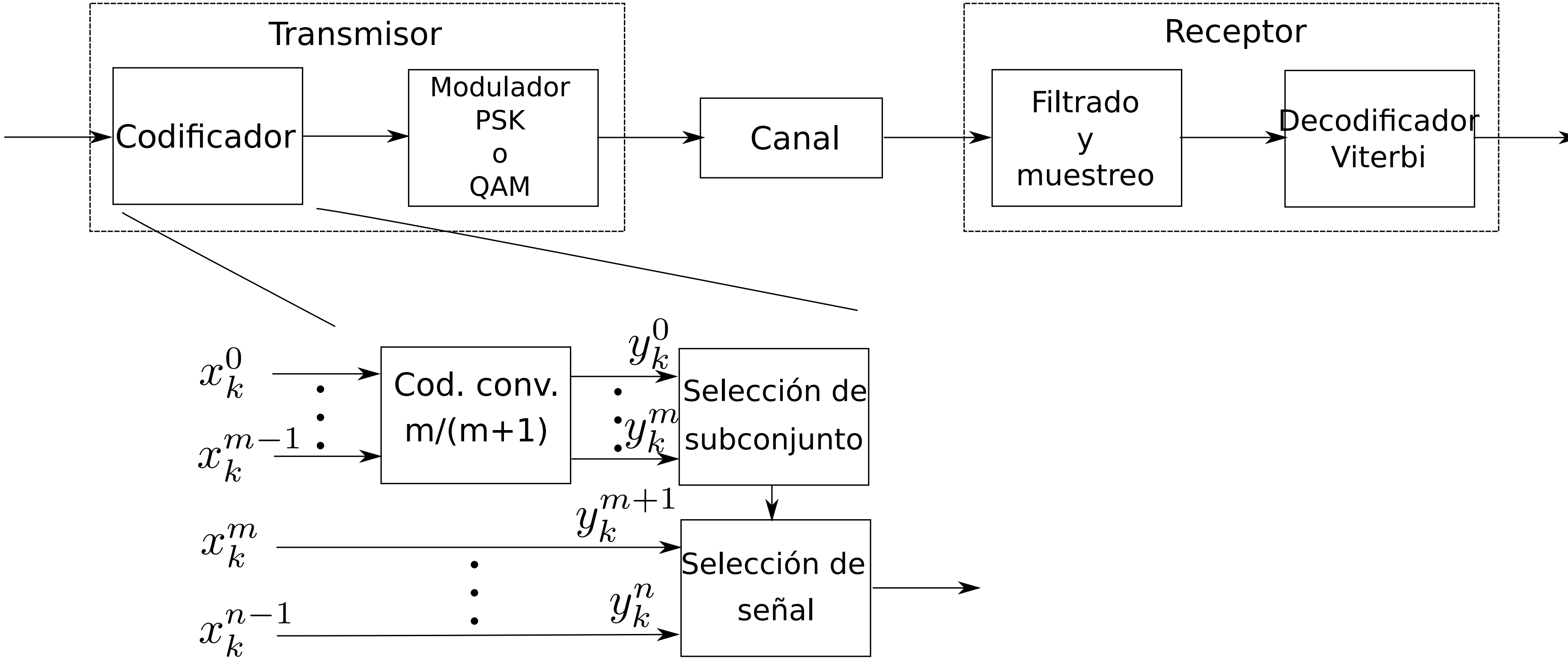
- Un *codificador convolucional (CC)* $n/n+1$
- y una *modulación PSK o QAM*

integrados de forma que se obtiene una buena asignación entre secuencias de bits y secuencias de señales.

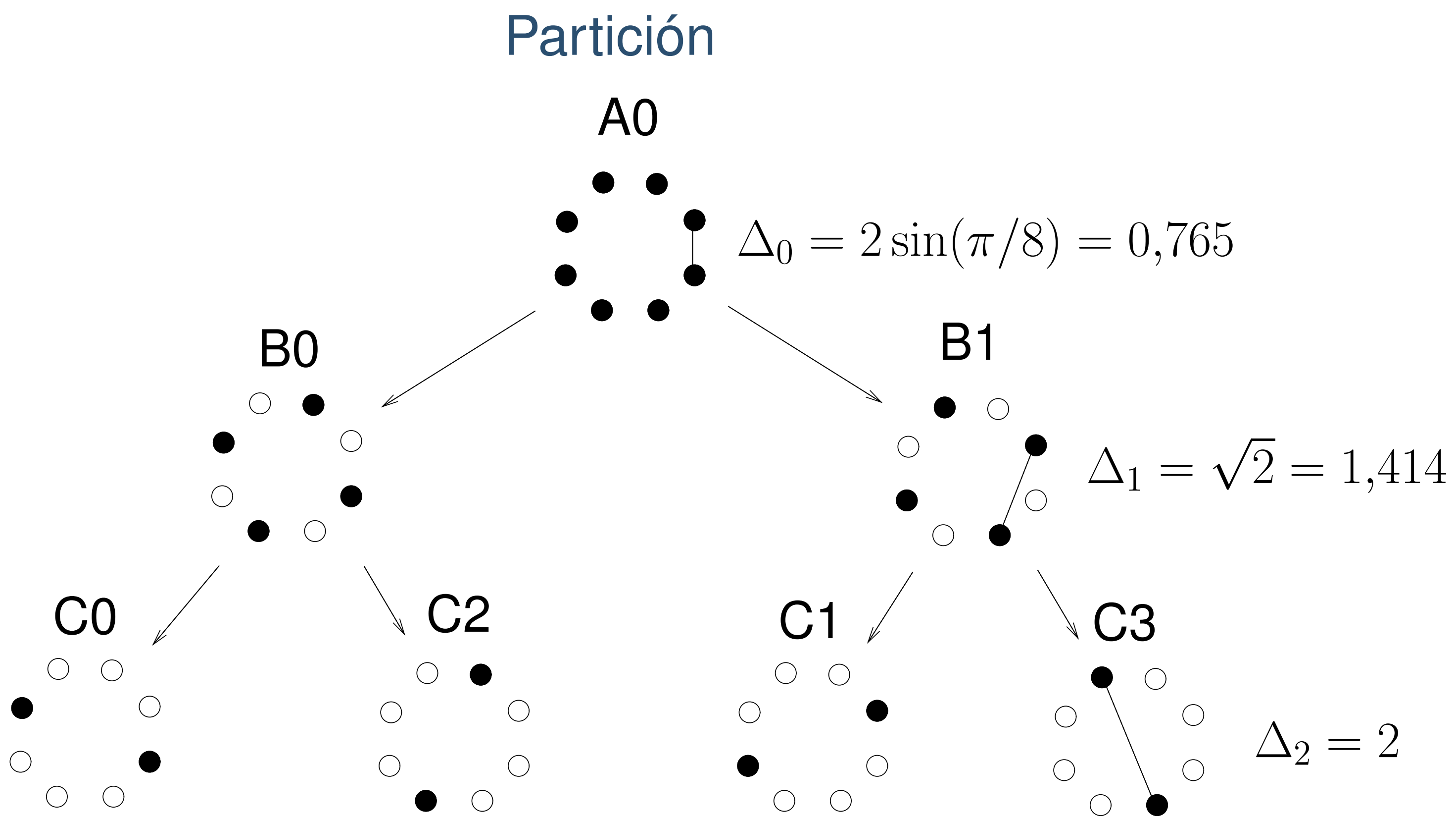
Para ello

- La constelación PSK o QAM se divide sucesivamente en *subconstelaciones* cada vez con mayor distancia mínima entre señales.
- Los bits de entrada se dividen en dos grupos:
  - Un grupo de bits va al CC y la salida de éste sirve para elegir subconstelación.
  - El otro grupo elige señal dentro de la subconstelación.

Diagrama de sistema TCM

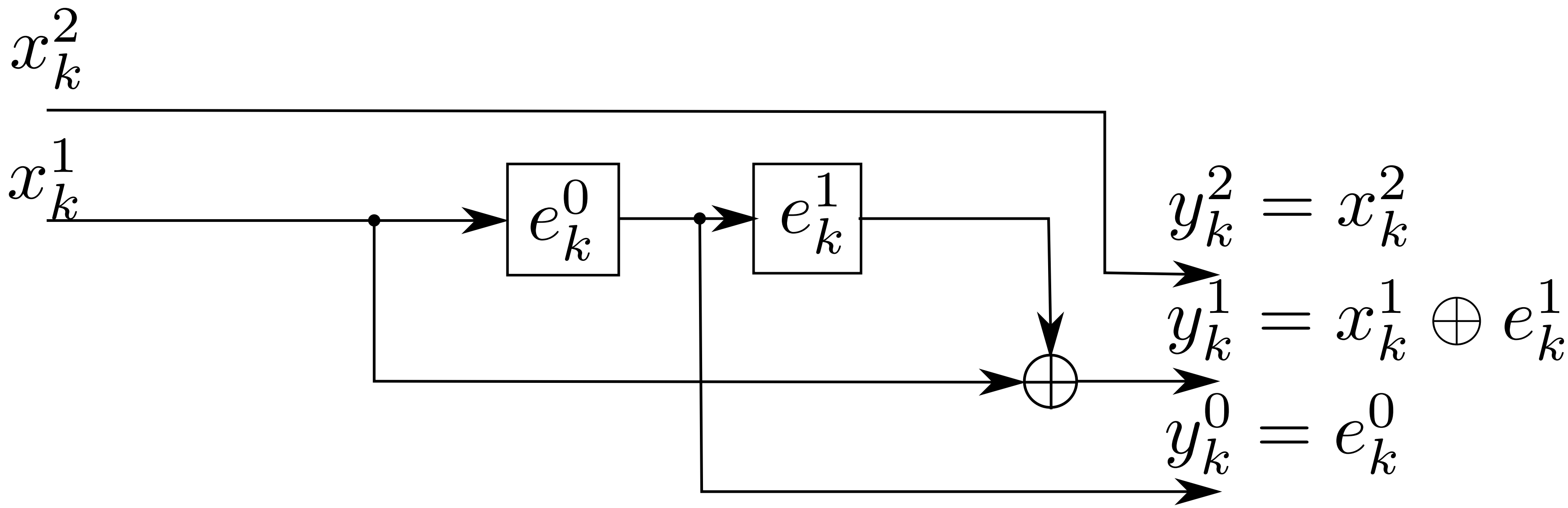


Ejemplo: Dos bits por señal sobre 8-PSK

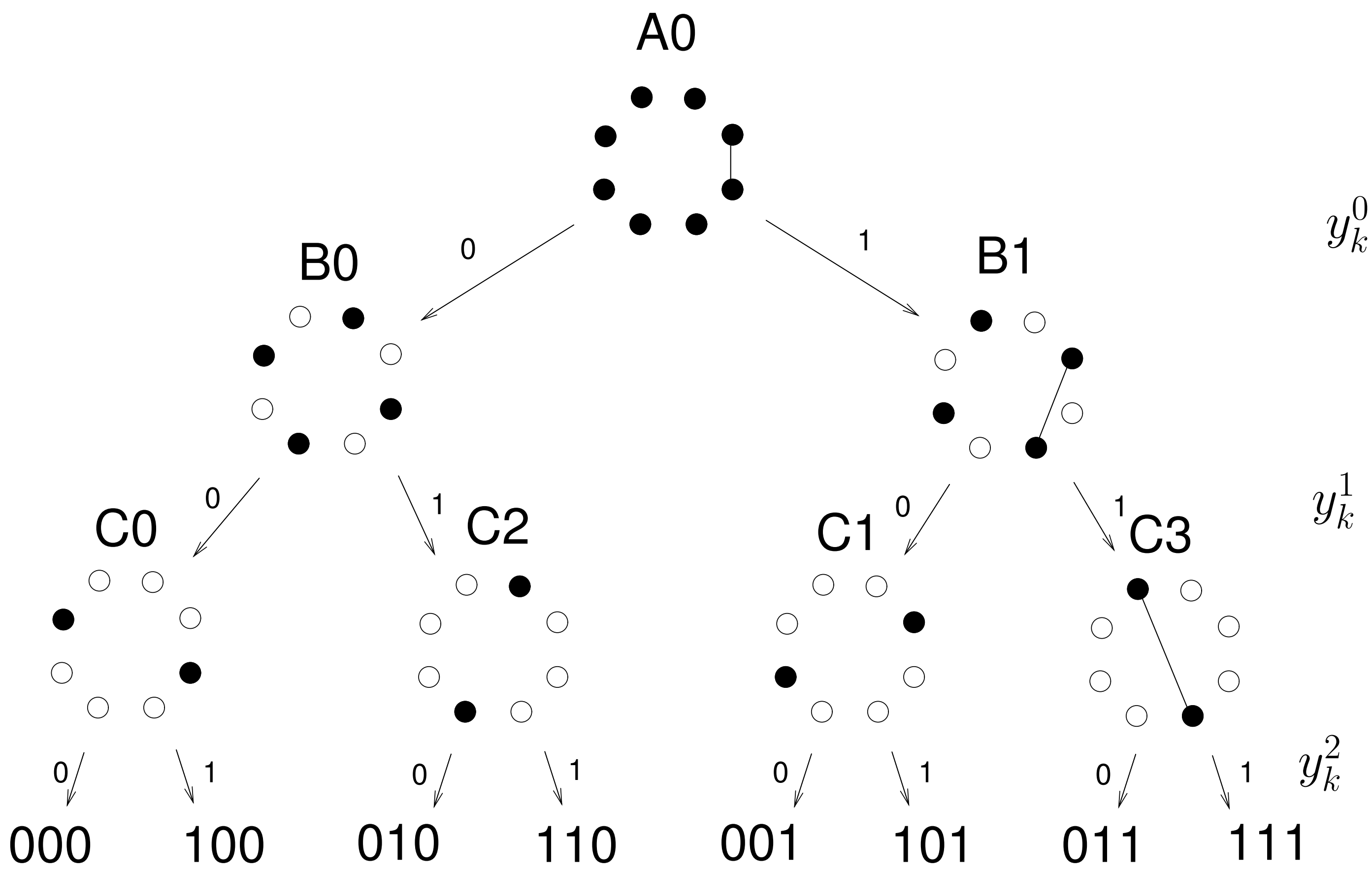


Ejemplo: Dos bits por señal sobre 8-PSK

Codificador (cuatro estados)

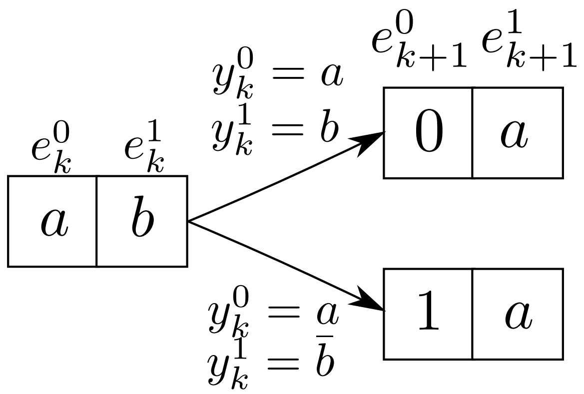


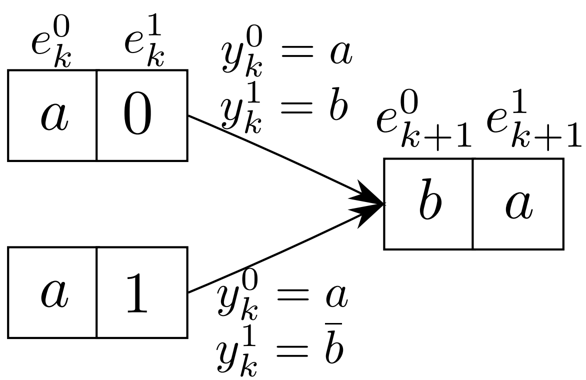
Asignación de bits



Ejemplo: Dos bits por señal sobre 8-PSK

Transiciones convergentes o divergentes generan el mismo bit $y_k^0 = e_k^0$, que es el que determina B_i
$\Rightarrow$ Distancia entre caminos que difieren en algún estado: $d^2 \geq 2d_{min}^2(B_i) = 2\Delta_1^2$.

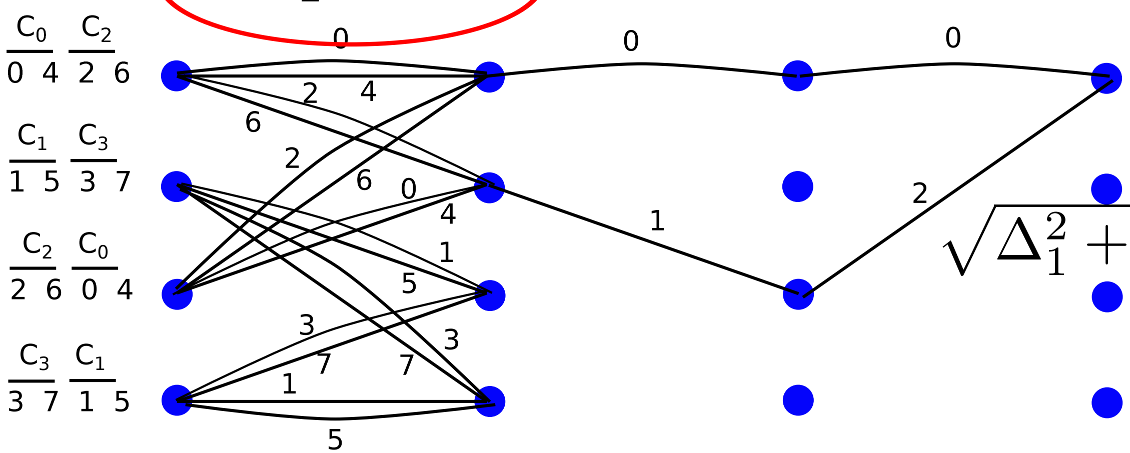




Ejemplo: Dos bits por señal sobre 8-PSK

Distancia mínima entre secuencias de señales:

$$\Delta_2 = 2$$



$$\Delta_0 = 0.765$$
$$\Delta_1 = 1.414$$
$$\Delta_2 = 2$$

$$\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_0^2 + \Delta_1^2} = 2.128$$

Ejemplo: Dos bits por señal sobre 8-PSK

- Si sólo difieren en una transición paralela:

$$d = \Delta_2 = 2$$

- Si corresponden a caminos que divergen y vuelven a converger: diferen como mínimo en tres etapas:

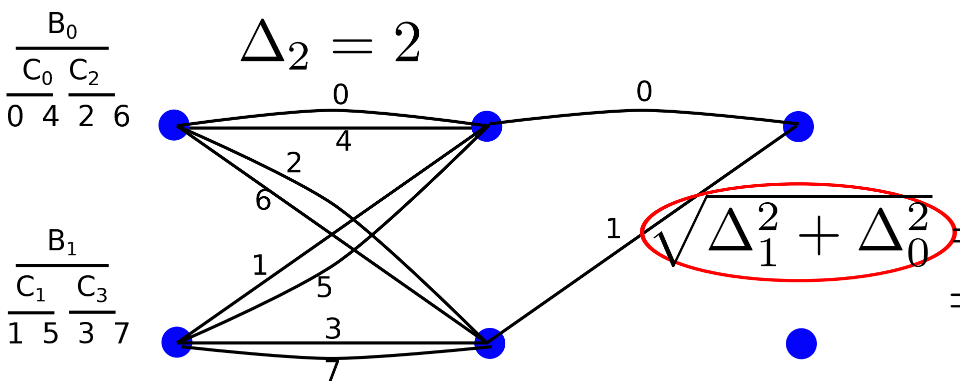
$$d^2 = \Delta_1^2 + \Delta_0^2 + \Delta_1^2,\ d = 2{,}128$$

La distancia mínima es por tanto $d = 2$.
Comparación con codificación sin memoria: 4-PSK:
$d_{min} = \Delta_1 = 1{,}414$

Ejemplo: Dos bits por señal sobre 8-PSK

Utilizando un CC de dos estados los resultados no son tan buenos:
Hay eventos más cortos y transiciones convergentes con $d = \Delta_0$.
Distancia mínima entre secuencias de señales:

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta_0 &= 0.765\\ \Delta_1 &= 1.414\\ \Delta_2 &= 2\end{aligned}}$$



$$\Delta_2 = 2$$

$$\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_0^2} = 1.608 = 1.137\Delta_1$$

Comparación con mod. sin memoria con la misma energía:
4-PSK: $d_{min} = \Delta_1 = 1{,}414$

Ejemplo: Prestaciones

4-PSK (como referencia)
Constelación con la misma energía y código Gray:

$$P_b = Q\left(\frac{\Delta_1/2}{\sigma_n}\right)$$

Ejemplo: Prestaciones

TCM cuatro estados

La distancia mínima corresponde a secuencias que difieren en una transición paralela, que corresponde a *un bit* de información de error:

$$P_{b,sup} \approx P_{b|E} \cdot v \cdot Q\left(\frac{d_{min}/2}{\sigma_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2B} BQ\left(\frac{\sqrt{2}\Delta_1/2}{\sigma_n}\right) = \frac{1}{2}Q\left(\frac{\sqrt{2}\Delta_1/2}{\sigma_n}\right)$$

B: Longitud de bloque (señales)

$P_{b|E}$: Prob. de error en un bit concreto cualquiera cuando hay error en la señal global

v: Número de vecinos

Ganancia sobre 4-PSK

$$G = 10\log_{10} 2 = 3 \text{ dB}$$

Ejemplo: Prestaciones

TCM dos estados

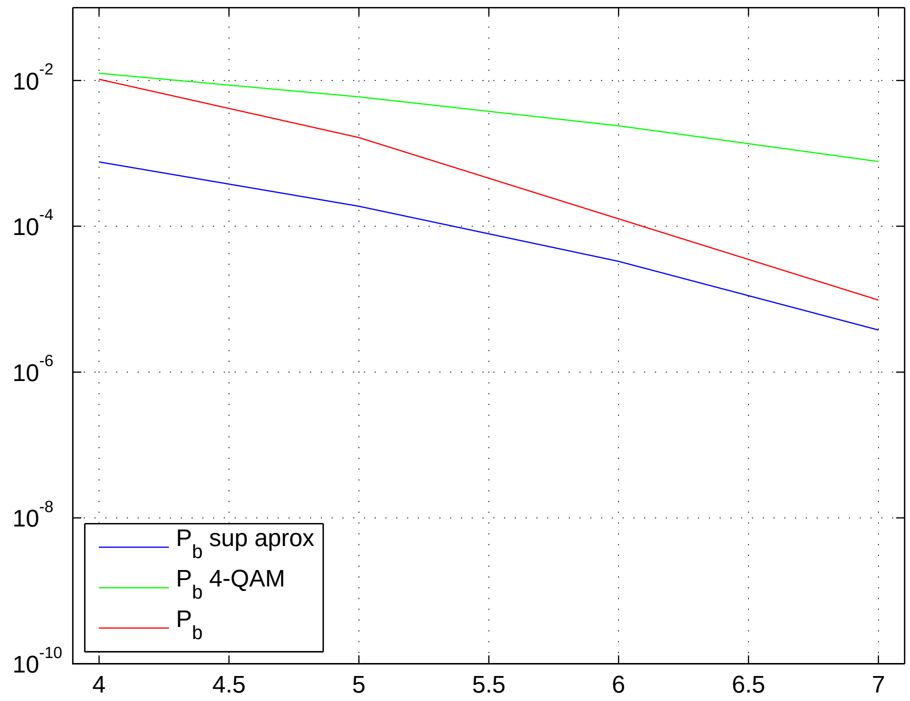
La distancia mínima corresponde a secuencias que difieren en dos etapas, por lo que difieren como máximo en $2 \times 2 = 4$ bits de entrada:

$$P_{b,sup} \approx P_{b|E} \cdot v \cdot Q\left(\frac{d_{min}/2}{\sigma_n}\right)$$
$$= \frac{4}{2B} BQ\left(\frac{1{,}137\Delta_1/2}{\sigma_n}\right) = 2Q\left(\frac{1{,}137\Delta_1/2}{\sigma_n}\right)$$

Ganancia sobre 4-PSK

$$G = 10 \log_{10}(1{,}137)^2 = 1{,}115 \text{ dB}$$

Función `mef_cod_conv_gen`: genera la máquina de estados de un codificador TCM generico.
Script `test_tcm_graficas_pe`: calcula las curvas de probabilidad de error empíricas para sistemas TCM.



Problema 4.8